

## ANALYSES DE PROCESSUS

**L** a mort est un bon point de départ.

*Au lieu de vaciller sur ses bases, de patauger dans des conditions initiales que l'on ne connaît pas, de remonter à ses origines douteuses, de reconstituer son être par des processus infiniment complexes enroulés dans des molécules génétiques dont il faut des milliards d'essais pour trouver la combinaison du coffre des ancêtres, mieux vaut démarrer le processus de la vie avec cette simple et tranquille certitude.*

*Après la mort, tout devient possible, tout peut arriver. On ne sait pas. Donc, ce n'est pas dans cette direction qu'il faut aller: c'est rétrospectivement, vers maintenant, c'est-à-dire vers les processus qui lui ont donné naissance.*

*Le décès, comme le mariage, est avant tout un acte notarié, commis le plus souvent avec préméditation. À la différence, parfois, que l'on peut se marier sur un coup de tête, alors que l'on peut mourir d'un coup de queue. Mais c'est l'aboutissement d'une suite d'actions et d'une interaction de millions de processus faisant intervenir des millions d'agents. C'est fou le nombre de processus qu'il faut mettre en oeuvre pour arriver à en mourir, alors qu'ils sont contrecarrés par tant d'agents et de thérapieutiques de survie, dont les effets secondaires peuvent être immortels.*

*Ce sont quelques processus, donc, mais dans leur version symbolique, ainsi que leur analyse, qui sont l'objet de cet exposé.*

*On en sortira transformé, radieux, allégé par la baguette magique des transformées-z et de Laplace, on s'affranchira de l'espace temporel en passant dans l'espace des fréquences; là, on ne sera plus qu'une transfiguration algébrique, envoyant du ciel, où montent en fusées d'artifice les processus divergents, de chatoyants graphes de flux de signaux.*



# ANALYSES DE PROCESSUS

## Sommaire

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 Processus temporels .....</b>                              | <b>5</b>  |
| 1.1 Processus .....   | 5         |
| 1.2 Notions temporelles figurant dans des processus .....       | 7         |
| 1.3 Opérateurs temporels .....                                  | 10        |
| 1.4 Une petite convolution .....                                | 15        |
| <b>2 Processus de traitement de signaux .....</b>               | <b>17</b> |
| 2.1 Correspondance discrète-continue .....                      | 17        |
| 2.2 Correspondances entre les signaux .....                     | 18        |
| 2.3 Echantillonnage de signal continu .....                     | 18        |
| <b>3 Les transformées .....</b>                                 | <b>21</b> |
| 3.1 Une jouissance fréquente et complexe .....                  | 21        |
| 3.2 Transformée de Laplace (unilatérale) .....                  | 23        |
| 3.3 Applications de l'expression de la translation droite ..... | 33        |
| 3.4 Résumé de l'exploitation des transformées .....             | 40        |
| <b>4 Deux modèles de processus en gestion .....</b>             | <b>43</b> |
| 4.1 La fonction de trésorerie .....                             | 43        |
| 4.2 Application au lissage exponentiel .....                    | 55        |
| <b>5 Les voies des processus .....</b>                          | <b>61</b> |



# 1 Processus temporels

## 1.1 Processus

### 1.1.1 Définition

Un *processus* est défini comme «une interaction persistante dans le temps entre deux ou plusieurs entités impliquant des échanges de matière, énergie et/ou information, qui conduisent à des changements de quantités ou de propriétés des entités impliquées». En principe, les *foncteurs* des processus purement temporels n'impliquent pas de *conversions*; ils ne modifient donc pas de façon significative les entités, de sorte que celles-ci ne changent pas de nom.

Le cas particulier de processus qui occupe cet exposé est *orienté* par l'indice temporel; si l'orientation temporelle est unique il s'agit évidemment du cas le plus familier, celui du processus *séquentiel*. Celui-ci est en général considéré "par défaut" (c'est-à-dire quand il n'est pas spécifié autrement); comme toute restriction, cela fait perdre de la généralité, dans ce cas par l'oubli de propriétés comme l'*interaction*, l'*anticipation* ou la *rétromettance* avec lesquelles un systémicien méritant doit en découdre.

Que l'on se rassure: on ira le faire, mais plus loin pour ne pas déranger les esprits moins alertes.

### 1.1.2 Processus séquentiel

L'aspect temporel vient naturellement lorsqu'il y a des intervalles de temps séparant les événements ou les valeurs exprimées. Le nombre de ces intervalles est donné par la différence entre les indices; de la sorte, une variable "y" écrite  $y_{t+k}$  est décalée de  $k$  intervalles de temps par rapport à  $y_t$ ; l'indice, décalé dans le sens positif, indique que  $y_{t+k}$  est situé  $k$  périodes "après"  $y_t$ . Bien sûr,  $y_{t-k}$  est vieux de  $k$  intervalles par rapport à  $y_t$ .

La Figure 1 présente cet argument important de la description de processus: la signification du *codage* par les *indices*, lequel conditionne la modélisation. L'exposé sur «Les Modèles de processus» le présente avec l'exemple du cycliste pour plaisir aux Lecteurs les plus mobiles; si on ne l'a pas sous la main, on peut se servir du bref rappel ci-dessous:

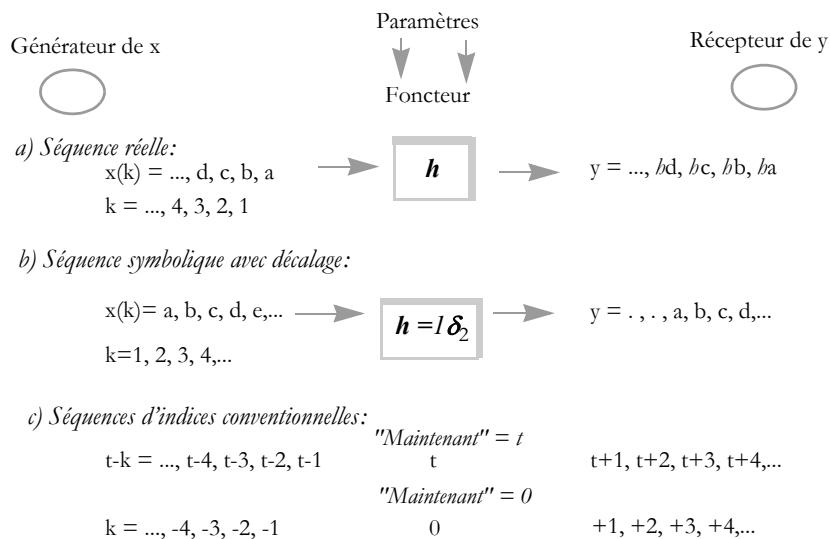
- Dans le cas de codage d'*itération*, il s'agit d'une répétition d'"essais" du modèle faits avec les valeurs successives de cet indice; cela s'applique aux exploitations des configurations dites "passives", via leurs "modules opérationnels".
- Dans le cas de codage *séquentiel*, les entités se présentent dans l'*ordre* de l'indice; ceci est valable pour les flux et les transformations, telles qu'il en sera présenté à la section 3. Quand l'ordre est pertinent, cela forme des *chaînes* ("strings" en anglais, mais quand c'est un (très) petit vêtement, on les dit aussi "coupe-crottes" en français) d'inputs.
- Le codage *temporel* situe les entités aux repères désignés par l'indice, et les flux transforment du temps. Dans ce cas, à la fois l'ordre, les valeurs et la situation de ces valeurs dans le temps sont significatifs pour l'output.

Les modèles temporels seront représentés plutôt par des *graphes de flux de signaux* que par des blocs algébriques; toutefois, les transformées "z" et "de Laplace" rendront possible d'y exploiter l'algèbre des opérateurs, et de résumer de la sorte des compositions temporelles même complexes. On en fera quelques faciles qui sont utilisées en gestion.

Ceci dit, il est gênant de dessiner un processus réel séquentiel, étant donné la lecture classique de gauche à droite, en suivant progressivement "l'axe temporel" situé par convention en abscisses. Cet argument est aussi illustré par la Figure 1, qui montre trois façons de coder et représenter une séquence de valeurs  $x$  codées par des indices temporels  $k$  se présentant à un foncteur  $h$ , et devenant des  $y_k$ :

- La séquence *réelle*: les entités codées arrivent au foncteur (et en sortent, dans cet exemple) dans cet ordre là; sur la figure, la valeur "a" de  $x$  sert à montrer que c'est la première de la série; des "itérations" se feraient par exemple selon de telles séquences, alors que les modèles dynamiques utilisent les deux suivantes;
- La séquence *symbolique*: c'est celle selon laquelle on "lit" les indices de la succession de gauche à droite; elle est enrichie d'un opérateur de décalage, qui engendre un délai d'arrivée, montrant bien le sens contre-intuitif de la convention;
- La troisième série montre les indices utilisés lorsque le repère temporel  $t$  est situé "maintenant", c'est-à-dire  $t=0$ . À ce moment,  $y_{-k}$  est "vieux" de  $k$  périodes, ce qui est clair et économique. Mais méfions-nous, c'est comme la mort: l'avant et l'après ne sont pas symétriques. De toute façon, comme disait l'autre (Sacha GUITRY?), «Les rumeurs concernant ma mort sont fortement exagérées». N'empêche qu'elles auraient fait dire à son ex-femme, Yvonne PRINTEMPS, dans cette riante perspective: «Enfin raide!».

Figure 1. Expressions des indices de séquences



## 1.2 Notions temporelles figurant dans des processus

Les configurations sont qualifiées de *statiques* dans les conditions suivantes:

- Elles ne sont pas situées explicitement dans un domaine temporel. Ainsi, on ne dit pas quand cela commence, ou finit, quelle est la succession des phases et combien d'unités de temps prend le transfert;
- La succession des indices est pertinente, mais la séquence des codes n'est pas nécessairement conservée;
- Le rôle du *temps* n'y est pas explicite;
- On n'a pas parlé du temps nécessaire pour les transferts et les transformations;
- Il n'a pas été spécifié si des entités *attendent*, ou *accumulent* de l'information ou du temps, ou encore *anticipent*;
- Elles sont qualifiées de *passives* parce qu'elles n'expriment pas une activité fournissant des outputs enregistrés au cours du temps.

Cette passivité va être à présent ébranlée, puis prise en mains, par les arguments suivants:

- Lorsqu'aux connexions sont associées des entités capables d'affecter la séquence temporelle, on parlera de *décalages* et de *délais*;
- Lorsque sont associées à des transformateurs des propriétés *d'accumuler de l'information et du temps*, on parlera de *mémoire*;
- La mémoire est *rétrospective* si elle accumule des données dont l'indice temporel est négatif (par rapport à "maintenant");
- La mémoire est *prospective* si elle accumule des données dont l'indice temporel est positif (par rapport à "maintenant"): c'est le cas de l'*anticipation*.
- Des inputs leurs seront soumis sous forme d'*impulsions*, ce qui va les activer un peu.

De telles propriétés et considérations sont développées dans les exposés sur la *dynamique*; on n'aura besoin ici que d'une brève spécification d'un décalage et d'un délai de façon à pouvoir s'engager dans la *rétromettance*. De plus, les *arrangements* considérés ici ne sont pas asservis; c'est à cette dernière considération qu'est associée la notion de *consigne*, qui sera présentée dans l'exposé «Processus sous consigne».

### 1.2.1 Décalage

Un *décalage* (temporel) est une translation d'un sous-ensemble d'indices (temporels):

- Un décalage *prospectif* est régi par une translation positive des indices (ce qui leur donne donc une valeur plus élevée);
- Un décalage *rétrospectif* est régi par une translation négative des indices (ce qui leur donne donc une valeur plus faible, et recule la référence dans le temps). Le décalage affecte l'ensemble des indices sans changer les références temporelles, donc le cycle temporel du processus. Ainsi, si un coureur cycliste est disqualifié, tous ceux qui le suivent avancent "d'un rang" et c'est pourquoi lorsque des prédecesseurs se pètent la gueule on a l'impression très réaliste de progresser.

L'écriture typique du décalage, est:

$$y_k = x_{k-t}$$

Un exemple en est donné par le Tableau 1 sur quelques valeurs numériques.

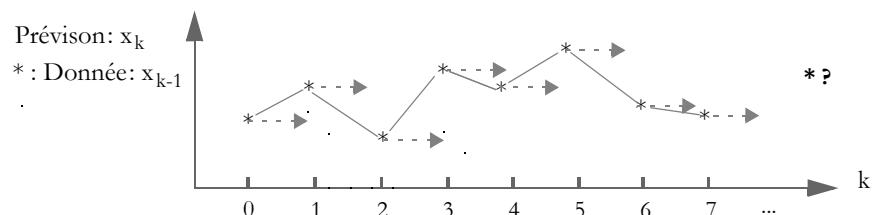
Le *délai*, en revanche, sera un accumulateur de temps, repris en 1.2.2. Dans le cas des cyclistes, par exemple, si un passage à niveau se présente dans une course, toute une théorie de pédales vont s'agglutiner les unes dans les autres, et les retardataires sont bien contents de les attraper par derrière.

**Tableau 1. Décalage de valeurs numériques**

| Temps k | $x_{k-2}$ | $x_{k-1}$ | $x_k$ |
|---------|-----------|-----------|-------|
| 4       | 17        | -         | -     |
| 5       | 19        | 17        | -     |
| 6       | 13        | 19        | 17    |
| 7       | 15        | 13        | 19    |
| 8       | ...       | 15        | 13    |
|         | ...       | ...       | 15... |

La Figure 2 représente une succession de valeurs  $x_t$  et leur projection selon " $x_{t-1}$ ". C'est une extrapolation "naïve" de  $x$  qui consiste à prédire "pas de changement", donc conserver la dernière valeur observée. Ce mode est fondé sur une hypothèse de *stationnarité* du premier ordre, c'est-à-dire, en l'absence d'information "innovante" et crédible, la stabilité de la moyenne et une espérance mathématique nulle des variations potentielles (aléatoires, imprévisibles) autour de cette moyenne. Un usage plus noble est de l'utiliser comme référence pour la confrontation des performances de différents modèles d'extrapolation.

**Figure 2. La projection dite "naïve", ou "pas de changement"**



Un peu plus intéressante à présent est la formulation:

$$(1) \quad x_k = p_1 \cdot x_{k-1} + p_2 \cdot d_k + p_3 \cdot u_k$$

Dans (1):

- $x$  est la variable *endogène*, donc résultante de sa propre dynamique et des influences;
- $d$  est une variable de *décision*;
- $u$  est une variable *exogène*. Ses valeurs sont arbitraires, ou mieux, décrivent des événements ou des comportements dont – pour le modèle considéré – le gestionnaire n'a pas la maîtrise;
- On y a ajouté des petits paramètres  $p_j$  pour faire plus vrai et plus joli.

Une relation entre des variables de management qui illustre classiquement (1) est celle de la différence de stocks, selon les notations suivantes:

- $S_k$ : le niveau de stock au moment  $k$ ;
- $P_k$ : le nombre d'unité entrée en stock (produites ou acquises) entre  $k-1$  et  $k$ ;
- $V_k$ : le nombre d'unité sorties du stock (livrées ou jetées) entre  $k-1$  et  $k$ .

La séquence temporelle (2) et les suivantes sont alors trivialement vraies:

$$(2) \quad S_{k+1} = S_k + P_k - V_k, \text{ soit:}$$

$$S_1 = P_1 - (V_1 - S_0)$$

$$S_2 = S_1 + P_2 - V_2 = P_1 + P_2 - (V_1 + V_2 - S_0)$$

$$S_3 = P_1 + P_2 + P_3 - (V_1 + V_2 + V_3 - S_0)$$

Soit, en écriture matricielle:

$$(3) \quad \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \dots \\ S_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_1 - S_0 \\ V_1 + V_2 - S_0 \\ \dots \\ \sum_{k=1}^T V_k - S_0 \end{bmatrix}$$

La structure qui s'en dessine est:

$$(4) \quad \mathbf{s} = \mathbf{D} \mathbf{p} - \alpha \mathbf{v} + \mathbf{s}_0$$

Dans (4),  $\mathbf{s}$  est le vecteur d'état,  $\mathbf{D}$  est la "Driving matrix", laquelle a le rôle d'opérateur de transition dans le temps et  $\mathbf{s}_0$  le vecteur des conditions initiales. Quand on deviendra adulte – dans les exposés sur «La Dynamique» – l'écriture se généralisera vers:

$$(5) \quad \mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{d} \mathbf{u}_k (+ \mathbf{y}_0)$$

Dans la version classique (5),  $\mathbf{y}$  est le vecteur endogène, éventuellement garni de ses conditions initiales,  $\mathbf{x}$  est décisionnel (c'est le " $\mathbf{p}$ " de (4)) et  $\mathbf{u}$  est l'impulsion exogène (le  $\mathbf{v}$  comme "ventes" dans (4)). Cela ne fait pas beaucoup rire les Lectrices, mais il y a pourtant beaucoup de modèles qui s'amusent avec.

### 1.2.2 Délai

Soit une suite d'inputs codés par un indice temporel:  $x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+h}$ . Une entité qui stocke une suite ininterrompue d'indices temporels décalés est un *délai*. Il n'est pas indispensable de spécifier pour l'instant si la suite est discrète ou continue. Cela signifie que dans les formalisations une suite partielle d'inputs est *congelée*, "immobilisée" dans un stock, lequel va donc contenir les inputs ayant ces indices temporels, et le taux de renouvellement des entités dans le stock dépend de la suite présente dans le délai.

Le flux décongelé transféré par le délai doit avoir le même *ordre* d'indices que le flux qui y entre. À l'encontre du cas du décalage, la présence d'un ou plusieurs *délais* peut affecter le cycle temporel de l'ensemble de la configuration. Un délai est donc spécifié par un intervalle de temps, sa *longueur*, qui est la somme des décalages des indices. L'*ordre* du délai est plus complexe car il fait intervenir à la fois le nombre et la spécification fonctionnelle des délais.

Le délai sera repris dans l'exposé sur «La Dynamique de systèmes en gestion», où il deviendra formellement un *intégrateur* puisqu'il contient un accumulateur de flux.

### 1.2.3 Itération

Une *itération* est une séquence de transformations identiques appliquée à une suite d'inputs de même nom codés par un indice temporel présentant un décalage rétrospectif. Une itération peut être répétée n fois: n est alors l'ordre de l'itération. En pratique, n itérations "refont la même chose" sur les inputs successifs de *même nom*; il n'est pas dit évidemment que ces inputs successifs sont identiques, sinon l'itération est oiseuse. Si, et seulement si, la configuration comprend une entité qui stocke la séquence d'outputs avec le même décalage temporel, les itérations jouent le rôle d'un *délai*, dont l'intervalle de temps est la somme des cycles temporels des itérations. Ceci n'est pas abstrait: les processus réels qui travaillent "par lots" procèdent à des itérations avec stockage des éléments jusqu'au transfert du lot ainsi constitué.

## 1.3 Opérateurs temporels

### 1.3.1 Définition

Soit un générateur qui fournit des valeurs à un foncteur **h**. Dans les processus temporels, les interactions se manifestent par leurs associations et leurs dispersions, lesquelles sont situées dans des "noeuds" sur les graphes de flux qui vont refaire surface dans un instant.

Ce terme de "noeud", et d'ailleurs les "graphes de flux de signaux", est issu des schémas électriques et électroniques, comme étant le point où s'expriment les "bilans" des courants, dont un exemple un peu trop léger figure dans l'exposé sur «La Systémographie». Lorsqu'un noeud est capable de modifier les flux ou les valeurs qui lui sont soumises, il fait une opération, et le foncteur de cet exploit est un opérateur.

Les opérateurs arithmétiques sont si fréquents et si connus que des signes spéciaux leur sont dédicacés, mais leur origine n'est pas incontestée. Ainsi, une version de l'origine du signe "-" le situe au treizième siècle, aux dépôts commerciaux de la place de Londres. Un trait horizontal sur ballot y indiquait que le poids requis n'était pas atteint – donc qu'il en "manque"; lorsque le lot est complété, on barre le signe "-", ce qui fait apparaître un "plus". Pour vérifier cela, il faudrait demander à un Collègue encore plus âgé s'il aurait été témoin de cette pratique; sinon, il faudra faire comme avec tout ce qu'on ne sait pas: l'attribuer aux Sumériens si c'est malin, ou à Bernard Shaw si c'est comique.

Ceci dit, la lecture de l'application d'un opérateur à un argument est celle d'un produit, par exemple " $h x$ ". Il faut rappeler aux grands naïfs que ce n'est vrai que dans le cas particulier où cet opérateur désigne le produit; il est alors situé entre deux données, et ne s'écrit qu'en cas de petit besoin urgent. Dans les autres cas, il désigne un machin, souvent représenté par le signe générique " $\bullet$ ", qui fait des tas de choses, même des tripotages espiègles, aux arguments qui lui sont innocemment livrés.

### 1.3.2 Opérateur de décalage

Soit un modèle linéaire donnant l'évolution temporelle de  $y$  en fonction de sa valeur antérieure et du signal d'input  $u_t$ . Dans ce cas, le foncteur  $f(y_{t-1})$  n'est qu'un coefficient scalaire, disons  $a_1$ , et la formulation est:

$$(6) \quad y_t = a_1 y_{t-1} + b_0 u_t$$

Dans (6), l'output "y" a un comportement formé par une partie *libre* (la variation propre de  $y$ ) et une partie *influencée* (par  $u$ ). Plus généralement,  $y$  peut être engendré par l'ensemble additif de ses  $n$  valeurs antérieures et être percuté par  $b_0 u_t$ , ce qui s'écrit:

$$(7) \quad y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots + a_n y_{t-n} + b_0 u_t$$

Le processus temporel de  $y$  est décrit par un modèle dit *auto-régressif* sous influence (de  $u$ ) ce qui forme (en (7)) une équation aux différences du  $n^e$  ordre; c'est joli mais cela commence à donner des inquiétudes au type chargé de la résoudre au lieu de l'écrire. De plus, si la présentation est en continu (c'est la différentielle  $\partial y$  qui est ici échantillonnée par " $y_{t-1}$ "), cela conduit à des équations différentielles à faire peur même aux candidats en science de gestion.

L'idée du gestionnaire de processus est de saisir (7) et de l'écrire comme dans l'expression (8). On y voit que  $b_0 u_t$  est une nouveauté à ajouter à la combinaison des valeurs antérieures pour former la valeur la plus récente  $y_t$ :

$$(8) \quad y_t - a_1 y_{t-1} - a_2 y_{t-2} - \dots - a_n y_{t-n} = b_0 u_t$$

Ensuite, il délègue le pouvoir à des *opérateurs*. À cette fin, on nomme d'abord un opérateur de *décalage* ("lag" en anglais) tel que:

$$\delta y_t = y_{t-1} \quad \text{et:} \quad \delta^1 y_t = y_{t+1}$$

L'*ordre* du décalage est l'exposant de l'opérateur  $\delta$ , et le modèle est polynomial en cet opérateur  $\delta$  selon (9):

$$(9) \quad \Phi(\delta) y_t = u_t$$

Dans (9), l'opérateur  $\delta$  devient l'argument de la fonction  $\Phi(\cdot)$ :

$$(10) \quad \Phi(\delta) = 1 + a_1\delta + a_2\delta^2 + \dots + a_n\delta^n$$

Cette forme (10) est généralisée par les modèles auto-régressifs sous influence. L'input global sur  $y$  devient une séquence pondérée des inputs  $u_t$  décalés, selon (11):

$$(11) \quad y_t - a_1y_{t-1} - a_2y_{t-2} - \dots - a_ny_{t-n} = b_0u_t + b_1u_{t-1} + b_2u_{t-2} + \dots + b_{n-1}u_{t-n+1}$$

Une deuxième fonction,  $\Psi(\cdot)$ , ayant l'opérateur pour argument, est engagée pour  $u$ , de sorte que la synthèse est (12):

$$(12) \quad \Phi(\delta)y_t = \Psi(\delta)u_t$$

En effet, ce n'est pas seulement la dernière impulsion qui projette le comportement, mais les stimuli antérieurs (ici les  $u_{t-k}$ , pondérés par des coefficients  $b_k$ ) laissent également des traces. C'est comme les pulsations honteuses de l'enfance, c'est-à-dire des  $u_{t-k}$  telles qu'en avait encore Sigmund FREUD à  $t=70$  ans.

La correspondance discrète-continue de l'expression simple auto-régressive, sous impulsion ponctuelle  $u_t$  se fait en constatant les équivalences suivantes. Soit "t" le temps initial et  $y_{(t)}$  la condition initiale. "Tout-à-l'heure" c'est  $t+1$ , et l'Angélus de dimanche midi c'est  $t+k+1$ . De la sorte, la relation temporelle s'écrit:

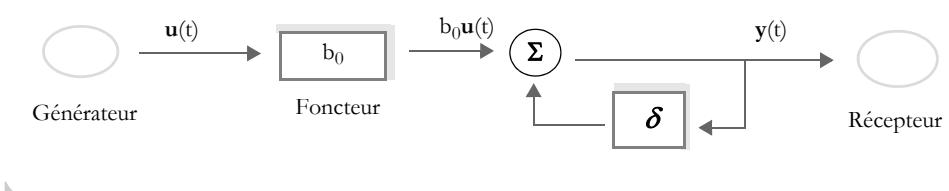
$$(13) \quad y_{(t+k+1)} = b y_{(t+k)} + b u_{(t+k)}$$

Entre (12) et (13), l'opérateur  $\delta$  joue le rôle de la translation temporelle d'une unité; elle est équivalente à la relation générique continue:

$$(14) \quad \delta y = b y + b u$$

La Figure 3 aide à montrer cette transformation du problème auto-régressif simple, qui sera généralisé dans le Tome Nord par l'exposé sur «La Dynamique sous influence».

Figure 3. Foncteur et opérateur de décalage



### 1.3.3 Opérateur de différence

Le cousin utérin de l'opérateur de décalage est celui de la *différence première*, laquelle au premier degré s'écrit:

$$\Delta y = y_t - y_{t-1} = (1 - \delta) y_t$$

Il peut étendre sa capacité de concentrer le temporel par l'expression algébrique suivante:

$$\Delta^2 y = (y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2}) = (y_t - \delta y_t) - (\delta y_{t-1} - \delta^2 y_t) = y_t - 2\delta y_t + \delta^2 y_t = (1 - \delta^2) y_t$$

Si on n'est pas trop près d'une grande chandelle de prof qui n'éclaire pas loin, on voit distinctement qu'on peut continuer comme cela jusqu'à ce qu'un cancer nerveux lui casse deux dents de lait. L'important, c'est que le débat passe du domaine *temporel* au domaine *algébrique*, ce qui se fera notamment par les transformées.

#### 1.3.4 Opérateurs de la forme canonique discrète

Souvent, en tricotant au coin du feu, elles parlent de l'âge "canonique". C'est la borne inférieure des repères temporels qui autorisent à accéder à la somptueuse promotion en tant que "bonne du curé", et que la règle fixe à quarante ans. Toutefois, les curés ont tendance à se faire rares – pour ne pas dire à se faire désirer. La question angoissante est donc à présent: quel est l'âge requis pour être autorisé à être le curé d'une bonne?



C'est ce qui arrive au modèle auto-régressif discret. Il peut lui aussi être conduit à une forme canonique en variable d'état  $\mathbf{x}$  par les transformations dites "des phases", écrites ci-dessous avec la légèreté des scalaires. La colonne de droite montre les mêmes définitions, mais décalées d'un pas temporel vers l'avant, et l'élimination de  $y_t$  en fonction de  $x_t$  arrange tout le monde comme dans le cas continu.

$$\begin{array}{ll} x_1(t) = y_{(t-n+1)} & x_{1(t+1)} = x_{2(t)} \\ x_2(t) = y_{(t-n+2)} & x_{2(t+1)} = x_{3(t)} \\ x_{n-1}(t) = y_{(t-1)} & \dots \\ x_n(t) = y_{(t)} - u_{(t)} & x_{n(t+1)} = y_{(t+1)} - u_{(t+1)} \\ & = -a_1 y_{(t)} - \dots - a_n y_{(t-n+1)} \\ & = -a_1 x_{1(t)} + \dots - a_n x_{n(t)} + u_{(t)} \end{array}$$

Le correspondant de la forme canonique en *phases* est appelé "nested" programming. La version matricielle (dite "direct programming") est (15)-(16), où les indices montrés sont 1, 2, n pour simplifier la lecture:

$$(15) \quad \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(k)$$

$$(16) \quad y_{(k)} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u_{(k)}$$

L'écriture conventionnelle d'un tel système (15)-(16) est dite *canonique* lorsqu'il est bien admis que:

- Le modèle est linéaire;
- Les coefficients sont constants;
- L'impulsion ( $u_k$ ) est un vecteur en  $k$ .

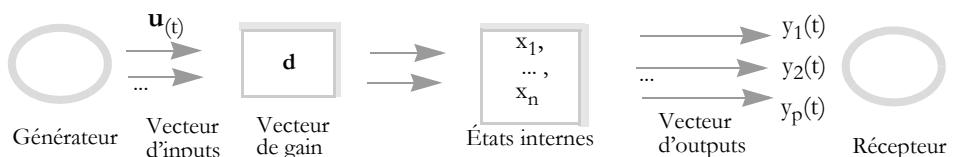
L'extension à plusieurs inputs et outputs se fait en empilant les vecteurs respectifs et adaptant les dimensions matricielles des *opérateurs* en conséquence de cette extension de l'espace de référence; (donc  $\mathbf{d}$  est un vecteur et  $\mathbf{B}$  devient une matrice). Ceci autorise une même écriture synthétique pour un processus temporel plus général, exprimé en discret par (17)-(18), et représenté par la Figure 4.

$$(17) \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k$$

$$(18) \quad \mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{d} \mathbf{u}_k$$

Et voilà que  $\mathbf{x}$  se dépose sur une *trajectoire* par un opérateur  $\mathbf{A}$ , qui, sous ce régime linéaire qui rend le modèle très mince, est une matrice *de transition*.

Figure 4. Inputs, états internes et outputs



### 1.3.5 Exemple numérique

$$y_t = -2 y_{t-1} + 0,5 y_{t-2} - 0,2 y_{t-3} + 0,5 u_{t-1} - 0,4 u_{t-2} + 0,7 u_{t-3}$$

Les vecteurs sont:

|              |              |
|--------------|--------------|
| $a_1 = 2$    | $b_0 = 0,5$  |
| $a_2 = -0,5$ | $b_1 = -0,4$ |
| $a_3 = 0,2$  | $b_2 = 0,7$  |

La formulation (17)-(18) devient numériquement la suivante, comme il est écrit dans les "textbooks" depuis que tout le monde recopie la même chose.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -0,5 & -0,2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,4 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + 0,5u(k)$$

## 1.4 Une petite convolution

La *convolution* est une formulation mathématique qui joue un rôle important dans beaucoup de domaines impliquant directement ou indirectement des réponses à des impulsions et des sommes de variables indicées. C'est ainsi qu'on la retrouve en statistique (pour les fonctions de répartition de sommes de variables aléatoires), dans les fonctions génératrices, dans les traitements de signaux digitaux ainsi que dans la projection de séries chronologiques relevant du domaine des filtres linéaires.

Peu développé chez les gestionnaires primitifs, avant les cours de systémique, "l'esprit de convolution" est une pourtant belle mentalité pour celui ou celle qui est en charge d'une dynamique de processus.

Il suffira ici de la faire apparaître dans le cas le plus simple, à savoir celui d'un système linéaire discret dont l'output  $y_k$  est construit par une variété linéaire de *ses propres valeurs* antérieures ( $y_{k-j}$ ) et des *impulsions*  $u_k$  en remontant dans le temps (par  $k-n$ ). On fera l'hypothèse que l'output  $y_k$  est nul avant le moment  $k=0$ .

$$y_k = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \dots + b_n u_{k-n} - a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2} - \dots - a_n y_{k-n}$$

Dans le cas particulier où  $y$  et  $u$  sont scalaires (donc un seul output et input), l'opérateur  $b$  est alors aussi scalaire et forme une *séquence de pondérations*:

$$y_k = \sum_{j=0}^{k-1} b_{k-j} u_j \quad \text{et } y_0 = b_0 u_0$$

Soit que le processus envoie une impulsion unitaire, c'est-à-dire:

$$u_0 = 1 \text{ (en } k=0\text{),}$$

La réponse de  $y$  "maintenant" est simplement:

$$w_{(0)}: \quad y_0 = b_0; \quad u_0 = b_0$$

Pour engendrer ses autres réponses,  $y$  combine sa propre série de valeurs "jusque là" avec la série des impulsions et cela en *croissant* les indices du temps puisqu'il faut construire chaque futur de l'un par le passé de l'autre : c'est ce que fait la *convolution*.

La séquence engendrée, où  $w_{(k)}$  va bientôt vouloir dire quelque chose, est:

$$w_{(1)}: \quad y_1 = b_1 u_0 - a_1 y_0 = b_1 u_0 - a_1 b_0$$

Intéressant? On va plus loin?

$$w_{(2)}: \quad y_2 = b_2 u_0 - a_1 y_1 - a_2 y_0 = b_2 - a_1 b_1 + a_1^2 b_0 - a_2 b_0$$

Comme on dit dans les ouvrages supérieurs (à celui-ci), «nous laissons au lecteur le soin de»... continuer à faire des  $y_k$  – disons, pour être raisonnable, jusque  $y_{57.823}$ . La séquence  $w_{(k)}$  ainsi obtenue s'appelle séquence de *pondération*, car ses valeurs seront combinées avec les valeurs antérieures de l'output pour former le nouvel output au temps  $k$  par (19):

$$(19) \quad y_k = \sum_{j=0}^k w_{(k-j)} \cdot u_j \quad \text{pour } k=1, 2, \dots$$

On voit bien dans (19) le rôle de toutes les valeurs antérieures (depuis le 0). Ceci formalise l'argument selon lequel les *conséquents* (les  $y$ ) ne sont pas *ponctuels* mais ont une "mémoire" des impulsions antérieures ( $u$ ) et des réponses ( $y$ ) qui y sont associées.

Une petite transformation d'indice facilite la lecture temporelle:

$$\begin{aligned} \text{soit :} \quad & t = k-j, \\ \text{de sorte que :} \quad & t = k \text{ quand } j=0, \\ \text{et :} \quad & t = 0 \text{ quand } j=k, \end{aligned}$$

où  $k$  est *maintenant*, tandis que  $j$  est *l'ancienneté*, comme le montre le Tableau 2.

**Tableau 2. Les indices de la convolution**

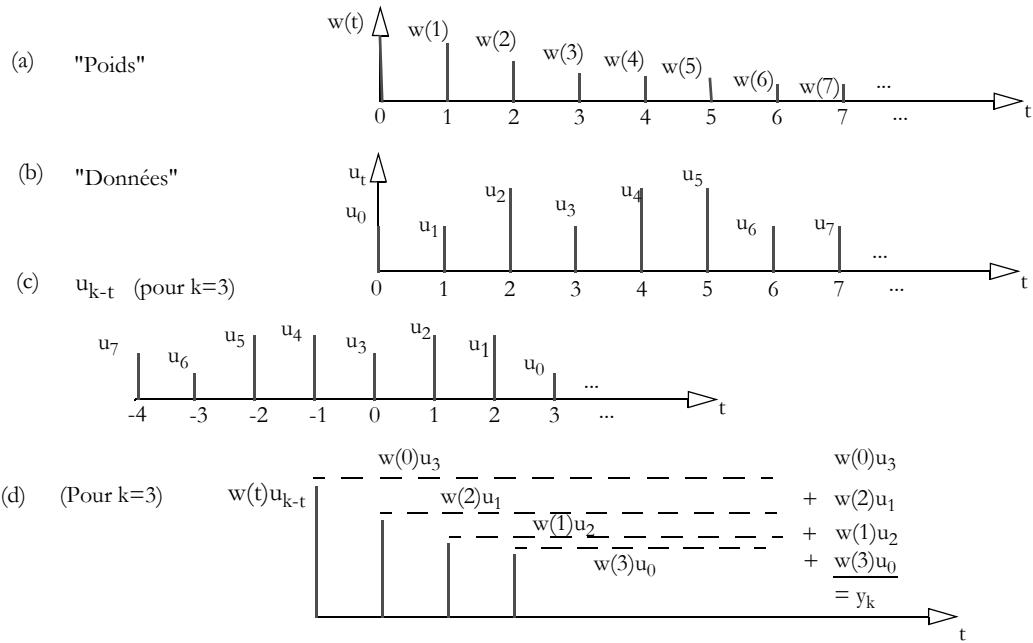
| $j$       | 0   | 1     | 2     | ... | $k$ |
|-----------|-----|-------|-------|-----|-----|
| $t = k-j$ | $k$ | $k-1$ | $k-2$ | ... | 0   |

Donc si on est en  $k=5$ , quand est-ce que "t=3"? La réponse est "il y a deux périodes". Pour le cas de  $t=4$ , ce serait "il y a une période". Cela a donc bien commencé en  $t=0$ . On est dès lors dans le bon sens pour écrire (19) comme devenant (20):

$$(20) \quad y_k = \sum_{t=0}^k w_t \cdot u_{k-t}$$

Par temps clair, lors des nuits sans lune, on peut voir cela graphiquement à la Figure 5. La séquence de pondération  $w_k$  est, dans cet exemple, exponentiellement décroissante: le but est de s'échauffer déjà en vue du *lissage exponentiel*, un modèle pratique présenté dans une section ultérieure et qui a cette formulation. La séquence des impulsions ( $u_k$ ) est très quelconque.

Pour obtenir (c) à partir de (b), sur la Figure 5, il suffit de lui dire de la retourner, la regarder dans un miroir, puis de faire une translation de  $k$  unités de temps. Vu la souplesse nécessaire, on comprend alors pourquoi la convolution n'est pas plus répandue dans les séquences d'un certain âge. L'output  $y_k$  (montré en (e) mais ici non calibré graphiquement) est bien sûr obtenu par la sommation des composantes correspondantes.

**Figure 5. Composition de la somme de convolution**

Bien que de nombreuses publications présentent cette matière très courante, il serait poli de remercier CADZOW et MARTELS (*Discrete Time and Computer control Systems*, Prentice-Hall, 1970, pp. 39 et environs) d'avoir déjà eu à l'époque le mérite d'écrire quelque chose de compréhensible et de bonne référence pour longtemps. Leurs notations ont été ici adaptées, et quelques mises au point de forme y ont cependant été apportées aux fins de cohérence. Ils vont aussi aider à établir les correspondances via le traitement de signaux.

## 2 Processus de traitement de signaux

### 2.1 Correspondance discrète-continue

Soit une affection affectueuse, un état pathologique continu. Mais si cette pathologie un peu chronique était le hoquet? Ce cas est-il une manifestation discrète d'une affection continue, ou bien considère-t-on que le phénomène de hoquets répétitifs est une affection continue, mais *échantillonnée*?

De même, un processus continu de valeurs peut être *échantillonné* au moyen d'un *rupteur*, qui en capte la valeur à des instants successifs. Il peut alors conserver des niveaux de valeurs discrètes pendant des intervalles de temps, ce qui rend le signal résultant continu par morceaux constants – ce que montrera la section 2.3.

## 2.2 Correspondances entre les signaux

L'échantillonnage par séquence d'impulsions est utilisé par convenance mathématique. Parmi les systèmes "réels" dont ceci est le *modèle*, on trouve essentiellement les processus d'échantillonnage des calculateurs et contrôleurs digitaux, où le traitement de signaux concerne principalement la *conversion*. En effet, la commande de processus étant confiée à des ordinateurs, il faut que tous les signaux puissent être traités sous la forme discrète et digitale; une séquence typique peut être représentée par la Figure 6 (avec l'aide de CADZOW et MARTENS, *ibid.*), où les boîtes contiennent des processus de conversion.

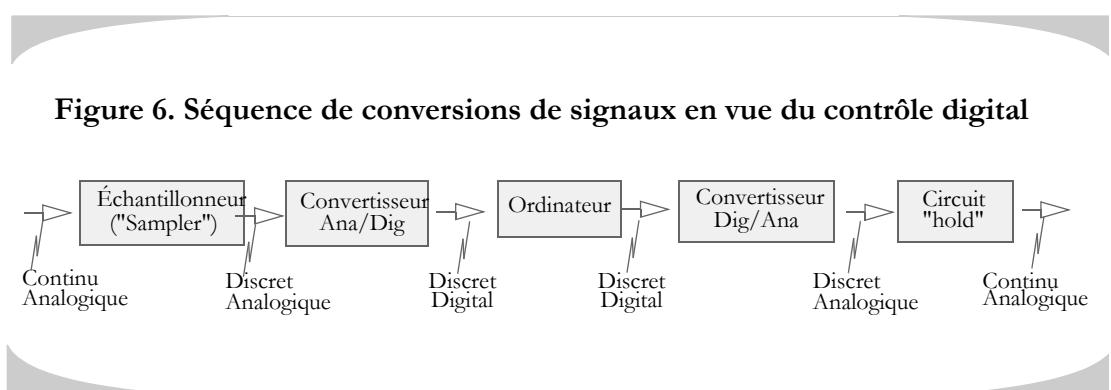
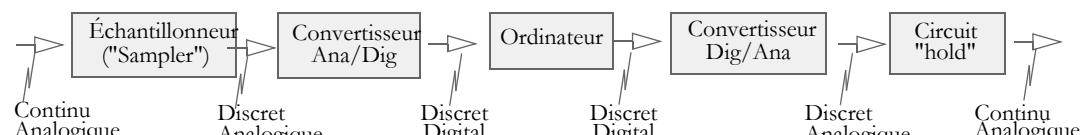


Figure 6. Séquence de conversions de signaux en vue du contrôle digital



L'"échantillonneur" ("sampler" en anglais) transforme le signal continu en un signal discret qui consiste en une séquence de valeurs échantillonnées prélevées sur le signal continu original (en général à des intervalles constants). Le signal continu original et le signal échantillonné ont en commun le fait d'être *analogiques*:

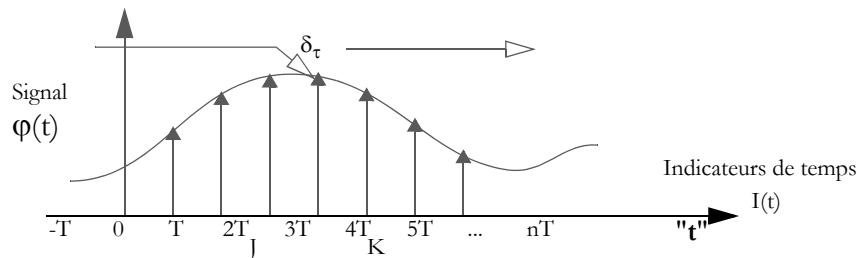
- La propriété d'être *analogique*, qui peut être associée à un signal continu ou discret, implique qu'il n'y a aucune restriction sur l'amplitude du signal dans une étendue donnée;
- Un signal *digital* a une amplitude restreinte à un ensemble borné de valeurs.

## 2.3 Echantillonnage de signal continu

### 2.3.1 Attouchements et pulsations

Par son origine, le mot "digital" implique que l'on travaille avec les doigts. Une calculatrice "digitale" a donc nécessairement besoin de temps pour effectuer toute opération qui lui est soumise par un programme. Ainsi, si on lui soumet un signal continu  $\varphi(t)$ , elle doit le palper avec précision puis, avec doigté, elle doit en circoncrire des petits morceaux, donc prélever des "bribes d'information". Ces attouchements subtils s'effectuent à l'aide d'un "rupteur", qui capte l'amplitude du signal à des instants particuliers, supposés ici de période constante, comme on le voit sur la Figure 7.

Un peu plus tard, il pourra *conserver l'information* de cette amplitude, pour donner à son client des pulsations qui subiront le traitement adéquat.

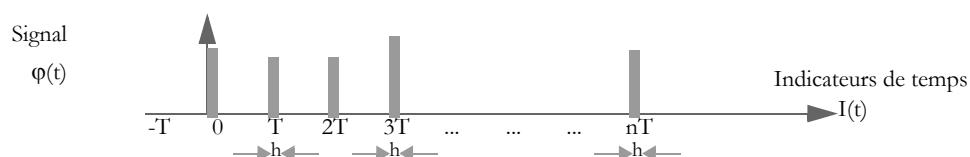
**Figure 7. Échantillonnage par attouchements**

Il s'agit donc d'une modulation de l'amplitude  $\varphi(t)$  d'un train d'impulsions par le signal à échantillonner aux instants périodiques  $0, T, 2T, 3T, \dots$  La Figure 7 aide aussi à comprendre la notion de "retard" du signal. En effet, au point  $J$ , par exemple, on peut estimer que le signal, lancé à l'instant  $0$ , est en "retard" de  $2T$ , si l'on prend  $0$  comme référence et  $J$  comme centre de diagnostic.

Une autre manière de procéder consisterait à permuter les instants de référence et de définir ainsi que par exemple en  $K$  le signal est en "avance" de  $nT$ . C'est pourquoi sur la Figure 7 on a présenté sur l'axe des abscisses un Indicateur  $I(t)$ , et non une "variable" temporelle. Il n'indique donc pas nécessairement que  $K$  est après  $J$ . Si le temps passe de gauche à droite, quand l'impulsion arrive en  $K$ , celle de  $J$  est déjà passée de 4 intervalles de temps! Donc  $\varphi(t-3)$  n'est pas en retard, mais bien *en avance* de 3 intervalles par rapport à  $\varphi(t)$ ;

### 2.3.2 Echantillonnage non-instantané à période constante

Dans le cas précédent, la caractéristique d'impulsion "instantanée" est physiquement utorique. Elle doit être adaptée en admettant que l'échantillon n'est plus une impulsion prise à l'instant  $nT$ , mais bien un signal de durée  $h$  non nulle qui se présente à l'instant  $nT$ . Ce signal, représenté à la Figure 8, introduit déjà l'important *trait morse* de la section 3.

**Figure 8. Signaux de durée  $h$  aux instants  $nT$** 

### 2.3.3 Obtention de la fonction d'impulsion de Dirac

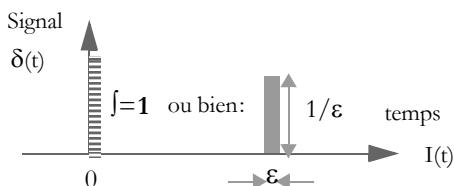
#### a Mathématiquement

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

#### b Pratiquement

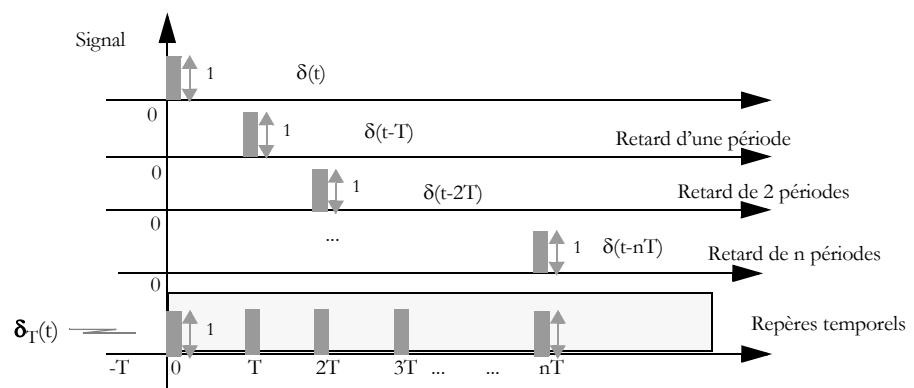
Soit que l'on reste coincé dans l'espace-temps positif, où  $t \geq 0$ . La définition précédente permet de constater aisément qu'un choix judicieux des unités suffit pour que l'on puisse considérer cette fonction comme une fonction "percussion unité" telle que la montre la Figure 9, où à la surface unitaire considérée on fait correspondre l'ordonnée 1.

Figure 9. Options d'impulsions



En conséquence, on définit un *train d'impulsions*  $\delta_T(t)$  de Dirac comme une succession de telles fonctions subissant un *retard constant de période*  $T$ , ce que représente la Figure 10.

Figure 10. Train d'impulsions de Dirac



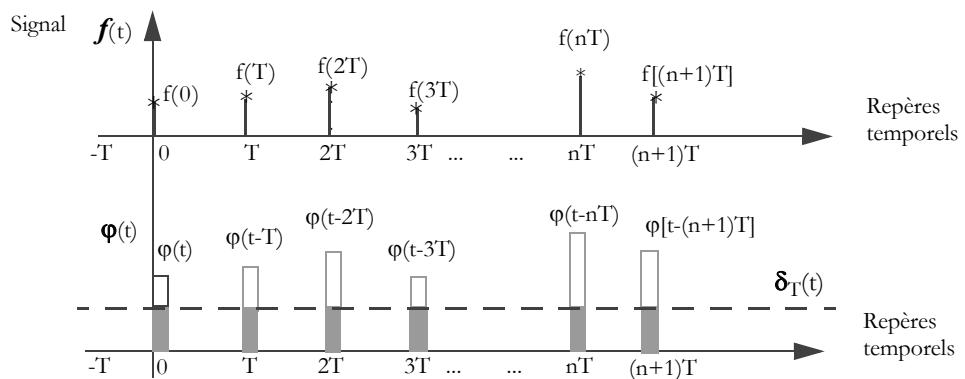
La Figure 10 montre la constitution du train:

$$\delta_T(t) = \delta(t) + \delta(t-T) + \delta(t-2T) + \dots + \delta(t-nT) + \dots$$

$$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT)$$

Afin d'obtenir une fonction  $\phi(t)$  ayant l'allure de celle de la Figure 8, il ne reste plus qu'à "moduler", c'est-à-dire à appliquer à cette fonction  $\delta_T(t)$  un opérateur de "saut" qui agit aux mêmes instants, donc de même période. Ce processus est réalisé par la mise en parallèle de  $\delta_T(t)$  et d'une fonction mathématique  $f(t)$  fournissant les coefficients de proportionnalité à chaque instant, soit  $f(0)$ ,  $f(T)$ ,  $f(2T)$ ,  $f(3T)$ , ...,  $f(nT)$ , ..., selon la Figure 11.

Figure 11. Convolution des signaux



La lecture de la Figure 11 est immédiate:

$$\phi_T(t) = f(0) \cdot \delta(t) + f(1T) \cdot \delta(t-T) + f(2T) \cdot \delta(t-2T) + \dots + f(nT) \cdot \delta(t-nT) + \dots$$

$$(21) \quad \phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \cdot \delta(t-nT)$$

Et on est enchanté de retrouver la somme de convolution telle qu'à la Figure 5.

### 3 Les transformées

#### 3.1 Une jouissance fréquente et complexe

Les matins calmes on peut entendre sonner un courageux réveil (il risque sa tête à claques) à dring-dring avec modulations s'il est cher, pendant disons deux minutes. Mais si, au lieu de lui péter la gueule, on retourne l'oreiller et passe dans l'espace des fré-

quences, on ressent avec ravissement une vibrante à 426 Herz, ce qui est proche de la note "la" sur un piano Steinway. Le temps de trouver les racines propres de ce machin, pour revenir dans l'espace temporel, l'autobus du boulot disparaît à l'horizon.

Les travestis connaissent d'ailleurs bien les transformées de Laplace pour sortir de l'espace du temps et entrer dans celui des *fréquences*. Ce qui est marrant, c'est que les gens croient que lorsqu'on le fait dans l'espace des fréquences ça va plus vite, ou qu'on le fait plus souvent. Or, en réalité, ce n'est qu'une jouissance plus complexe, vu qu'on l'obtient par une intégrale de  $e^{-i\omega t}$ . Le gag c'est que les états  $x_i$  résultants sont alors souvent variables et complexes aussi, et qu'il faut faire ensuite la transformée inverse (ce qui peut demander une certaine souplesse) pour reprendre ses esprits dans l'espace temporel.

Les transformées de FOURIER sont un peu cela, mais elles ont commencé plus modestement, par les petits jeux de dés des tripots fréquentés par DE MOIVRE. Déjà en 1730, dans une éjaculation précoce, ce somptueux mathématicien a cherché – et trouvé ! – le moyen d'exprimer les probabilités associées aux *sommes* des valeurs obtenues en lançant  $n$  dés réguliers "généralisés" à  $k$  faces numérotées de 1 à  $k$ . Dans cette version initiale il s'agit donc d'*engendrer* les masses de probabilité de *sommes* de variables aléatoires à valeurs entières: ce seront les premières *fonctions génératrices* de probabilité.

Plus généralement, les transformées de LAPLACE (1812), puis celles de FOURIER (la semaine suivante), plutôt construites à d'autres fins, permettent d'engendrer de façon *unique* toutes les fonctions de densité de probabilité et leurs moments. Les "fonctions génératrices" peuvent donc être considérées comme une application spécifique (et très jolie) des transformées de LAPLACE et FOURIER; leur version discrète est la transformée-"*Z*", à laquelle la fonction génératrice des probabilités est formellement équivalente.

Le fait que leurs domaines d'exploitation sont variés est dû au service très général qu'elles rendent sur les interactions entre des séries de valeurs de variables ou de fonctions temporelles; une contribution déterminante en est la transformation de formulations temporelles (linéaires) en formulations algébriques.

La multiplicité des domaines où de tels problèmes se présentent font alors que leur exposé peut être entrepris selon différentes approches, mais leur formulation mathématique directe, sans avoir besoin d'un contexte spécifique, est auto-suffisante.

Cette variété de domaines d'exploitation a éveillé la cupidité des systémiciens vers cette arme si puissante, eux qui ont tendance à se mêler un peu de tout... C'est même devenu quasi *par définition* le domaine privilégié de la *théorie des systèmes* et de la systémique appliquée; l'expression et le traitement des processus dynamiques par des modèles symboliques est en effet le blason de la *noble* systémique – les autres disciplines qui en héritent n'en étant que des *bâtards*.

Il y a de nombreuses sources chaudes qui exhalent des vapeurs de transformées. Parmi les plus saines, qui ont fait du bien au présent exposé, on conseillera E.L. Jury: *Theory and application of the z-transform method*, Wiley, 1964 pour l'option discrète et pour l'option continue, le cours de *Mathématiques appliquées II, les transformations intégrales*, par F. X. LITT, AEES-Liège, ULg 1981 (Offert gracieusement par ce sympathique Cher Collègue, ce qui est remarquable dans le milieu).

### 3.2 Transformée de Laplace (unilatérale)

L'étude de l'incidence d'un signal donné sur un processus physique *continu* peut être facilitée par le travail dans un *domaine artificiel* auquel on accède par un changement de variable appelé transformée de LAPLACE. Dans l'espace-temps positif ( $t \geq 0$ ), ce qui la rend "unilatérale", celle-ci est définie par:

$$(1) \quad L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt$$

Cette expression appelle quelques remarques hâtives pour se mettre à l'abri de critiques sur son utilisation aveugle:

- La variable  $s$  est définie dans le plan complexe, soit  $s = \sigma + j\omega$ ; c'est donc dans ce domaine-là que se font les discours sur la convergence, et pas ici sur terre.
- Elle n'est pas valide pour des fonctions temporelles  $f(t)$  dont l'évolution est plus rapide que l'exponentielle, donc pour  $f(t) \geq M e^{\alpha t}$ , ou pour des fonctions trop bizarres issues des fantasmes des matheux.
- Elle connaît une version bilatérale (de  $-\infty$  à  $+\infty$ ) mais seule la définition la plus simple, (1) ci-dessus, sera utilisée et ce, aux fins d'introduire avec naturel la transformée-z, laquelle concerne les séries discrètes.

#### 3.2.1 Propriétés

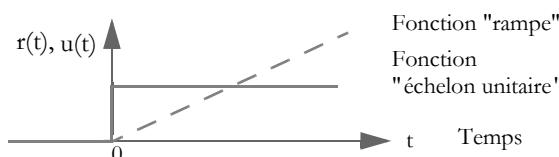
Quelques-unes de ses propriétés, citées ici mais que l'on peut démontrer quasi directement à partir de la définition, donnent un certain feeling de ce qu'elle peut faire, et surtout aideront à effectuer une correspondance avec la transformée-z. Bien que n'étant qu'un produit dérivé, c'est cette dernière qui sera plus explicitée ici en raison des services rendus à des processus que l'on décrit quand on croit faire de la science de gestion.

##### a Transformées des fonctions "échelon" et "rampe"

La fonction "échelon unitaire" est omniprésente en étude des processus temporels. Elle est définie mathématiquement par (2) ci-dessous et graphiquement par la Figure 12.

$$(2) \quad u(t) = \begin{cases} 0, & \text{pour } t = 0 \\ 1, & \text{pour } t \geq 0 \end{cases} \quad r(t) = \begin{cases} 0, & \text{pour } t = 0 \\ t, & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

Figure 12. Fonctions "échelon unitaire" et "rampe"



La formule de l'"escalier" est  $x_{k+1} = x_k + a$ , où  $a$  est une constante entière.

En intégrant par parties successives depuis la définition, on a:

$$L(t^n) = F(s) = \int_0^\infty t^n \cdot e^{-st} dt = \frac{n}{s} \cdot \int_0^\infty t^{n-1} \cdot e^{-st} dt \dots = \frac{n!}{s^n} \cdot \int_0^\infty e^{-st} dt$$

On obtient les cas particuliers pour  $n=0$  (donc  $t^0$  pour l'échelon  $u(t)$ ) et  $n=1$  (donc  $t^1$  pour la rampe  $r(t)$ ):

$$L[u(t)] = 1/s \quad \text{et} \quad L[r(t)] = 1/s^2$$

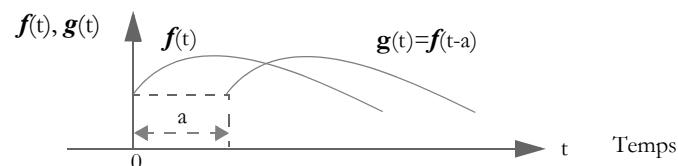
### b Translation vers la droite

La translation vers la droite est la procédure correspondant à l'expression d'une fonction temporelle en relation avec des valeurs antérieures, ce qui est le fondement des processus auto-régressifs et de l'extrapolation en économétrie. La formulation directe est donc:

$$g(t) = f(t-a),$$

où  $a$  est le décalage, ce qui est représenté par la Figure 13.

Figure 13. Translation d'un fonction temporelle



Toutefois, comme on a convenu de ne considérer que le temps positif,  $f(t) \geq 0$ , il faut constituer  $g(t)$  en multipliant  $f(t)$  par l'échelon unitaire  $u(t)$  décalé, soit:

$$g(t) = f(t-a)u(t-a),$$

Effectuant la transformée, on obtient:

$$(3) \quad G(s) = L[(t-a)u(t-a)] = e^{-sa}F(s)$$

Ce résultat (3) donne donc une interprétation de  $e^{-st}$  comme *opérateur de décalage*; on retrouvera dans quelques instants ce même rôle très important attribué à "z".

### c Intégrale et dérivée

Les expressions des transformées de l'intégrale et de la dérivée  $f(t)$  donnent une interprétation complémentaire à la transformation; en effet, l'intégrale sur le temps a une connotation d'accumulateur, et la dérivée celle d'un variation différentielle.

L'intégration par parties de  $e^{-st}f(t)$  donne pour la dérivée:

$$(4) \quad L[f(t)] = sF(s) - f(0^+)$$

Soit à présent l'intégrale

$$g(t) \equiv \int_0^t f(v) dv$$

La dérivation des deux membres donne  $g'(t) = f(t)$ , et en appliquant (4) ci-dessus on obtient:

$$(5) \quad G(s) = \frac{1}{s} \cdot F(s)$$

On est heureux de voir que toute cette extension du temps de 0 à  $t$  se manifeste par une simple prémultiplication "algébrique" par  $1/s$ ; celui-ci aura de ce fait une place d'*opérateur* dans les configurations de processus temporels.

La vertu la plus prisée en est la transformation des équations intégralo-différentielles (linéaires) en équations algébriques; en effet, souvent les variations sont exprimées par rapport au niveau ou à l'état atteint, disons  $x$ , ce qui donne  $dx/x$ , soit la différentielle du logarithme  $\ln x$ , conduisant à des solutions temporelles du type  $x(t) = e^{at}$ . Intuitivement, il n'est donc pas tellement bizarre que des transformations de variables du type  $e^{-vt}$  amènent à des simplifications de traitement de telles formulations.

### 3.2.2 La transformée discrète "z"

On entre poliment dans  $z$  en effectuant la transformée de Laplace de la fonction  $\phi(t)$  "discrétisée" (1), c'est-à-dire:

$$(6) \quad \begin{aligned} L[\phi(t)] &= F(s) = \int_0^\infty \left[ \sum_{n=0}^\infty f(nT) \cdot \delta(t - nT) \right] \cdot e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty \left[ f(nT) \cdot \int_0^\infty \delta(t - nT) \cdot e^{-st} \cdot dt \right] \\ &= \sum_{n=0}^\infty [f(nT) \cdot e^{-nsT}] \end{aligned}$$

L'expression (6) donne donc la transformée de la "fonction échantillonnée" de  $\phi(t)$  de période  $T$ , présentée sur la Figure 13.

#### a Cas du retard: $Z^-[\phi(t)]$

Se rappelant que l'expression  $e^{-pt}$  peut être considérée comme un opérateur de retard (de  $pT$  périodes), on peut définir une transformée  $Z^-$  d'une série discrète en posant:

$$z = e^{-st}$$

Dans ce cas, la transformation donne:

$$Z^-[\phi(t)] = \sum_{n=0}^\infty f(nT) z^n$$

Cette version (initiale) correspond à ce qui est généralement appelé "fonction génératrice". En fait, elle est associée aux travaux de DE MOIVRE (cité plus haut), concernant les *fonctions génératrices de probabilités*, ces dernières étant obtenues par la suite des coefficients de polynômes en  $z$ . Comme cette voie n'est pas celle de cet exposé, la suite se fera avec la formulation classique issue de la transformée de Laplace, présentée comme "cas de l'avance" – ce qui est la bonne optique pour un gestionnaire pressé.

### b Cas de l'avance: $Z^+[\phi(t)]$

La transformée  $Z^+$  d'une série discrète de temps positif s'obtient en posant dans (6):

$$z = e^{st} \quad f_n = f(nT)$$

Ce qui donne:

$$(7) \quad F(z) = L[f_T(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot z^{-n}$$

Il apparaît déjà que l'argument "z" pourra jouer, dans les processus discrets, un rôle de décalage temporel analogue à celui de l'expression  $e^{-nsT}$  dans le cas continu.

#### 3.2.3 Simple et directe

Épargnant quelques kilomètres d'exposés aux promeneurs de cette interface, on entrera directement dans la transformée-Z par son interprétation en tant que *décalage* d'un intervalle de temps. Si les intervalles de temps considérés dans la séquence temporelle sont égaux, on peut utiliser l'expression plus simple: "unité" de temps. Dans ce cas, il y a une confraternité formelle entre les transformées et les fonctions génératrices des masses associées à des valeurs discrètes entières – celles qu'avait considérées DE MOIVRE.

Soit  $f_k$  une suite, c'est-à-dire une fonction à valeur numérique dont le domaine de définition est l'ensemble des entiers,  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Un exemple en serait  $4k^3 - e^{2k} - k!$ , mais celles qui seront considérées ici seront plus simples.

La transformation-z de la suite  $f_n$  définie sur les entiers positifs ( $0, 1, 2, \dots$ ) est la fonction  $F(z)$  développée de (7) par:

$$(8) \quad F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k} = f_0 + f_1 \cdot z^{-1} + f_2 \cdot z^{-2} + \dots$$

Quelques mots devront être glissés plus loin sur la convergence de cette série et sur sa relation avec la transformée de Laplace, mais on ne peut tout dire à la fois.

#### 3.2.4 Inverse, perverse et complexe

Le titre 3.1 avait annoncé une jouissance fréquente et *complexe*; voici à présent pourquoi elle est complexe et demande, comme on le craignait, une certaine souplesse. Les écritures conventionnelles montrant la relation directe et la relation inverse entre le domaine temporel et celui des transformées qui lui correspondent sont:

$$(9) \quad F(z) = Z[f_k] \quad \text{et} \quad f_k = Z^{-1}[F(z)]$$

La transformée inverse, faisant passer de l'espace des fréquences  $\mathbf{F}(Z)$  (où on est arrivé très facilement) à l'espace temporel  $\mathbf{f}(k)$ , doit s'écrire:

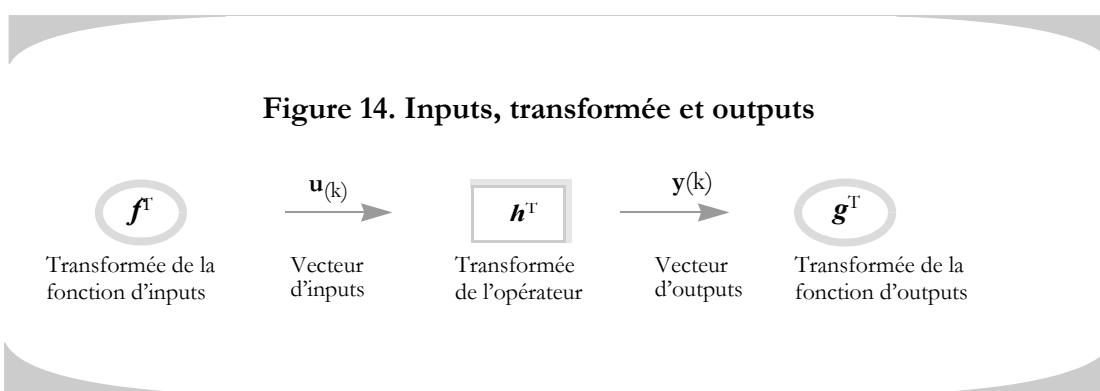
$$\mathbf{f}(k) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \oint_{\Gamma} \mathbf{F}(Z) Z^{k-1} dZ$$

L'intégrale fermée est prise dans le plan complexe de  $Z$ , selon une courbe circulaire dont le rayon est celui du rayon de divergence de la transformée. On est content? On peut aller plus loin?

### 3.2.5 Inputs, transformée et outputs

En principe l'argument  $Z$  n'est qu'opérationnel, mais des transformées de suites élémentaires vont aider à donner du sentiment à cette transformation. Elles montreront que la contribution principale des transformées de suites est d'exprimer l'*interaction* de séries temporelles par le *produit* de leurs transformées, ce qui est alors une opération algébrique, donc se prêtant à des gymnastiques sur des engins plus adaptés à la souplesse et la grâce naturelles des Lectrices. En voici un facile d'emploi.

Soit  $\mathbf{f}$  la fonction génératrice des inputs,  $\mathbf{h}$  son opérateur et  $\mathbf{g}$  sa fonction d'output. Le graphe de base du processus dans le domaine des transformées est la Figure 14:



Conformément à sa définition (8), la transformée d'un fonction temporelle élémentaire s'obtient par le produit du vecteur des valeurs successives par les puissances de l'argument  $Z$ . Soit donc la suite le plus élémentaire engendrée par une fonction  $\mathbf{f}_k$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_1 &= 1, 1, 1, \dots \\
 k &= 0, 1, 2, \\
 (10) \quad \mathbf{f}_1^T &= 1 \cdot Z^0 + 1 \cdot Z^{-1} + 1 \cdot Z^{-2} + 1 \cdot Z^{-3} + \dots = \mathbf{f}_1^T(Z)
 \end{aligned}$$

Définissant les vecteurs:

$$\mathbf{f} = [1 \ 1 \ 1 \ \dots] \text{ et } \mathbf{Z} = [Z^0 \ Z^{-1} \ Z^{-2} \ \dots],$$

il est clair que la transformée est dans ce cas le produit scalaire  $\mathbf{f}^T \mathbf{Z}$ .

Soit à présent le cas de l'*impulsion unitaire*... suivie de rien, de sa réponse et de la transformée de la réponse. Une impulsion unitaire est définie par un cri "1!" lancé à un moment donné, disons l'instant  $n=0$ , puis plus rien... épuisement ou silence de mort, allez savoir:

$$f_1 = 0, 0, 1, 0, 0, \dots$$

$$k = -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Ceci est évidemment un cas particulier de (10), où il reste seulement  $f_1^T = 1 \cdot Z^0 = 1$ .

Avec cela, la théorie des systèmes fait un régal de petits plats mijotés. Cette transformée de l'impulsion unitaire – et sa réponse "*g*" – permettent de pénétrer doucement dans les processus dynamiques sous influence, de même qu'une brochette d'écrevisses flambées à la vodka permet d'entrer doucement dans un repas, ou qu'une pointe d'arthrose aux hémorroïdes permet d'entrer doucement dans une vieillesse presque sereine.

Voyons avec quelle aisance l'engin peut grimper une *rampe*, définie par:

$$f_2 = 0, 0, 1, 2, 3, \dots$$

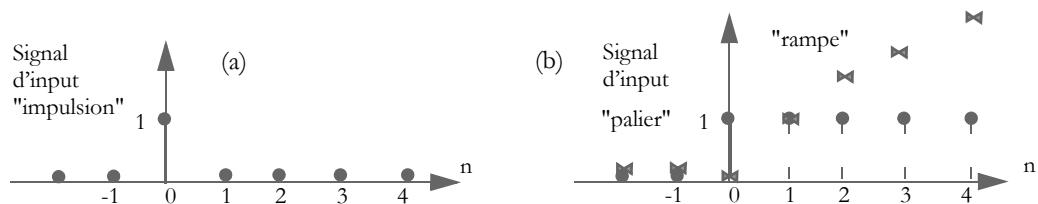
$$k = -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Le produit scalaire, trop familier avec les clients, ne sera montré qu'une seule fois:

$$(11) \quad g^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z^0 \\ Z^{-1} \\ Z^{-2} \\ \dots \end{bmatrix}$$

Quant au produit "scolaire", les profs et les parents le disent nettement moins performant. En bande dessinée, les fonctions *impulsion*, *palier* et *rampe* sont sur la Figure 15.

Figure 15. Signaux d'input discrets élémentaires



Il serait intelligent de demander au prof si par hasard les séries formées par les transformées convergeraient vers quelque chose d'intéressant? La réponse est oui, mais pas sous n'importe quelle condition: il faut transformer des fonctions raisonnables, et surtout il faut que ce "Z" soit situé hors d'un rayon  $R^-$  dans un certain plan complexe dont on ne dispose pas dans cet ouvrage, mais qu'on peut trouver dans des boutiques spécialisées pour adultes. Donc, oui, ici elles convergent, et ailleurs, elles vont se faire outre.

Ces convergences sont respectivement de:

$$(12) \quad f_1^T = 1/(1-Z) \quad \text{pour } (f_1), \text{ et}$$

$$(13) \quad f_2^T = 1/(1-Z)^2 \quad \text{pour } (f_2)$$

L'expression (12) a une signification opérationnelle fort intéressante. Soient:

**f** : la fonction d'input qui fournit une impulsion unitaire à l'instant "0", puis plus rien (c'était le cas (a) de la Figure 15);

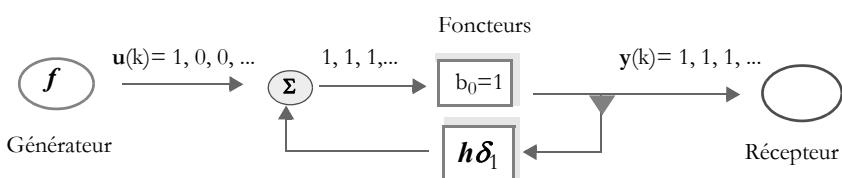
**g** : La fonction d'output;

**h** : l'opérateur affectant la série;

**$\delta_k$**  : l'opérateur de décalage de  $k$  unités.

Le processus consiste à saisir chaque fois cette unité et l'ajouter telle quelle ( **$h=1$** ) à l'impulsion suivante qui arrive; elle serait donc "remise en arrière", soit "feed back" en américain, ce qui est porté à la Figure 16 – qui améliore la Figure 15:

**Figure 16. Foncteurs et feed-back**



Le processus résultant est bien sûr le fameux "feed-back", dans sa version le plus élémentaire. C'est là que s'exercera le génie de la transformée, mais il faut être attentif à la façon dont le temps (et ses indices) se passe, en se rappelant la Figure 1. Ici **f** est génératrice d'une séquence. L'impulsion de valeur 1 arrive en  $k=0$ ; la suivante, qui vaut zéro, arrive en  $k=1$  et il en va de même pour la suite.

- Si le processus était *réel*, donc un flux physique, ce seul "1" serait fourni, suivi par des zéros (1, 0, 0, ...); il passe par un foncteur neutre (ici  $b_0=1$ ), puis il serait saisi à la sortie et "remis dedans", ce qui ne donne *pas* un output 1, 1, 1, ... On continue comme cela à tourner en rond (ce qui donne une "loop" en anglais) tant qu'un bienfaiteur n'a pas cassé le jouet.
- La Figure 16 montre que ce processus n'est pas réel mais n'est qu'un *modèle*.

En effet, c'est un *signal* qui est saisi à l'output et transmis par un *capteur* (et pas par un "voleur de flux"); ce signal est composé avec l'input pour soumettre un nouveau signal aux foncteurs et poursuivre le processus en tant qu'output. Du point de vue temporel, le processus "patine" sur place en quelque sorte et, effectivement, l'expression (12) ne présente pas d'argument temporel explicite – la formulation est algébrique et non plus dynamique.

Le modèle du feed-back est donc un modèle de *traitement de signaux*; on verra un beau jour, pour confirmer cela plus pratiquement, que le feed-back est un processus dont la rétromettance est à faible énergie comparativement à l'énergie du chemin prospectif principal.

Ce qui vient d'être dit pour le cas le plus élémentaire (celui de l'impulsion) est généralisé pour les signaux d'inputs moins naïfs, dont quelques exemples seront présentés. On peut d'ailleurs engendrer les autres à partir de compositions de ce "module" de base.

Mais alors, au sens littéral, est-ce qu'on a "perdu son temps"? La réponse est non: son expression a été formulée d'une nouvelle façon concentrée, et on peut le libérer par la transposée inverse, c'est-à-dire revenir dans le domaine temporel. Ceci est exprimé par la fonction d'output dans le domaine temporel  $[g(k)]$ ; à l'issue de la transformée, on sait comment il se comporterait dans la suite si on le laissait filer.

### 3.2.6 Du bon usage de $F(z)$

#### a Linéarité-additivité

Soient deux fonctions génératrices de séquences numériques  $f(k)$  et  $g(k)$ , et deux scalaires  $a$  et  $b$ . La transformée-z de toute combinaison linéaire  $h(k) = af(k) + bg(k)$  est additive:

$$H(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} [af(k) + bg(k)]z^{-k} = a\sum f(k)z^{-k} + b\sum g(k)z^{-k} = aF(z) + bG(z)$$

Voilà qui règle les comptes du design en *parallèle*.

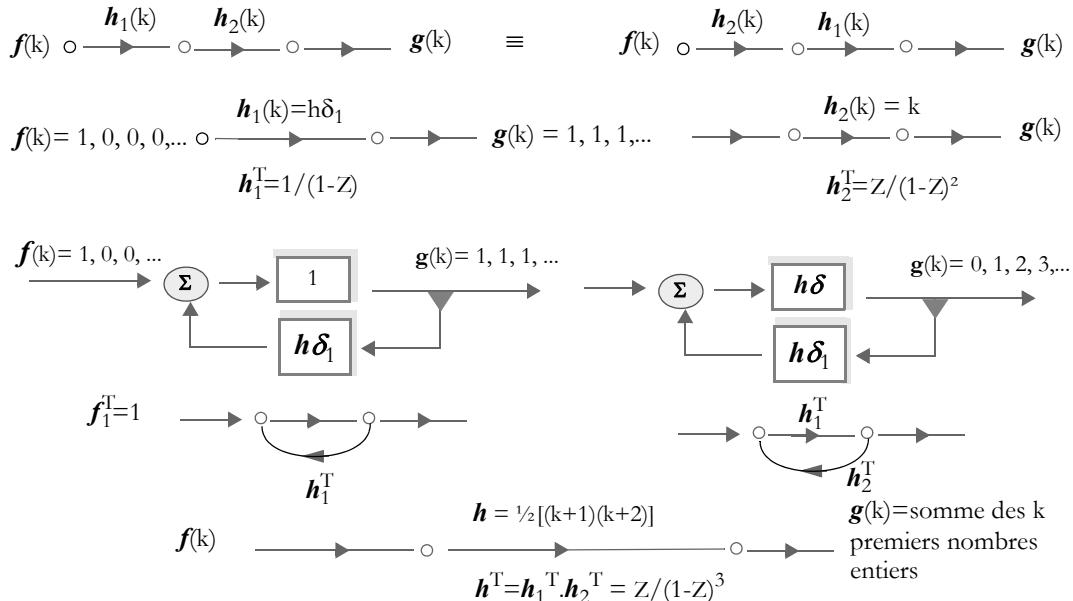
#### b Série et produit

Soit une fonction génératrice de séquences numériques  $f(k)$  et soit  $g(k)$  l'output du processus. L'input subit deux transformations successives, gérées respectivement par les foncteurs  $h_1(k)$  et  $h_2(k)$ . Dans ce cas, on l'a dit, la composition est multiplicative, et cette opération est commutative sur les transformées, qui sont algébriques. La Figure 17 montre le cas le plus simple d'un couplage de deux transformées. Avec un peu d'adresse, mais beaucoup plus de clarté et moins de charge visuelle, on peut faire de façon équivalente toutes les simplifications de configurations algébriques telles qu'elles ont été présentées sur le Tableau 2 des «Modèles de Processus».

Les *nœuds* d'un tel graphe forment la composition des signaux (par exemple en tant que *concentrateur*, tel un opérateur d'addition) où ils rendent compte alors de la valeur de la variable ainsi formée. Ils sont aussi *distributeurs* de cette valeur dans d'autres branches.

Sur les arcs s'effectuent les transformations  $F$  (ici les transformées des opérateurs  $H$ ), qui sont les "blocs" dans les configurations par... blocs. Celles-ci ont une mission de représentation d'équations algébriques simultanées mises dans un ordre qui explicite la formation de valeurs de variables à partir de séquences de signaux reçus via d'autres variables. L'algèbre des configurations ne "résout" pas, mais apporte les transformations qui amènent à une formulation "standard", de solution déjà connue.

Figure 17. Réduction d'un couplage de transformées



Cette dualité par laquelle les transformations sont soit sur les arcs, soit dans les blocs, se retrouve lors de la modélisation de problèmes des EAH lorsqu'on présente les choses d'une part selon les configurations par blocs et d'autre part selon les *graphes d'influence*, vus dans l'exposé sur «La Systémographie». Lorsqu'il s'agit de description de processus, le graphe d'influence, même s'il comporte des boucles, se doit donc de donner un *sens de lecture* du modèle. Si cela n'est pas possible, la configuration est invalide ou ne représente pas un processus, mais seulement une architecture statique interactive dans laquelle le passage du temps ne peut pas être rendu explicite.

On retrouve aussi cette dualité dans les représentations de processus de production appelés les "GRAFCET", en relation avec l'OFFSET, Association Française de Cybernétique Économique et Technique, qui en fournit les publications.

### c Les fonctions puissances

Soit à exprimer la transformée de  $f(k) = w^k$ , pour  $k \geq 0$ :

$$(14) \quad H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} w^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (wz^{-1})^k = \frac{1}{1 - wz^{-1}} \text{ si } |z| > w, \text{ sinon diverge.}$$

Ceci décrit en effet une série géométrique de raison  $r = wz^{-1}$ , d'où on a déduit la transformée (14), et qui a pour condition de convergence que  $|r| \leq 1$ . On fait de la sorte apparaître des "pôles", les racines du polynôme qui annulent le dénominateur – font diverger.

Atteindre ces pôles d'ici ferait une excursion dans des contrées trop froides, mais on peut en voir un d'ici en grimpant sur l'expression (14): si  $Z$  est interprétée comme une variable complexe, la somme diverge pour  $|Z|=w$ , le dénominateur devenant nul. Faire tendre  $Z$  vers  $2w$  montre en revanche une *convergence* vers  $\sum(\frac{1}{2})^k = 2$ .

#### d Le produit de convolution

L'expression (14) est écrite ici avec "w" pour faire référence à la "somme de pondération", présentée avec la somme de convolution. Ceci va fournir une propriété fondamentale des transformées à savoir que *dans le domaine des transformées*, la fonction de réponse  $\mathbf{G}(Z)$  est le produit de la séquence de pondération  $\mathbf{H}(Z)$  par la fonction d'input  $\mathbf{F}(Z)$ :

$$(15) \quad \mathbf{G}(Z) = \mathbf{H}(Z) \cdot \mathbf{F}(Z)$$

$$Z\text{-Réponse} = Z\text{-Pondération} \cdot Z\text{-Input}$$

Il est remarquable que la propriété (15) soit valide quelle que soit la fonction  $f$  d'input. L'exemple le plus élémentaire suffira donc pour l'illustrer. Soit une fonction génératrice d'input qui soit simplement l'ajout d'une unité,  $u(k)=1$  pour  $k \geq 0$ . Sa transformée est  $1/(1-z)^{-1}$ . Dès lors, la transformée de la réponse est bien:

$$(16) \quad \mathbf{G}(Z) = \mathbf{H}(Z) \mathbf{F}(Z) = \frac{1}{1-wz^{-1}} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{1}{1-w} \cdot \left[ \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{w}{1-wz^{-1}} \right]$$

La transformation inverse de (16) donne la réponse (17) dans le domaine temporel:

$$(17) \quad g(k) = \frac{1-w^{k+1}}{1-w}$$

Ce résultat (17) est conforme à celui qui a été obtenu par convolution; l'exemple donné ci-dessus est en effet explicitement:

$$\sum_{j=0}^k h(k-j)f(j) \Rightarrow \mathbf{H}(Z) \mathbf{F}(Z)$$

Celui-ci est toutefois plus direct et élégant et surtout peut être appliqué à des fonctions d'input multiples et sophistiquées.

#### e Expressions des translations

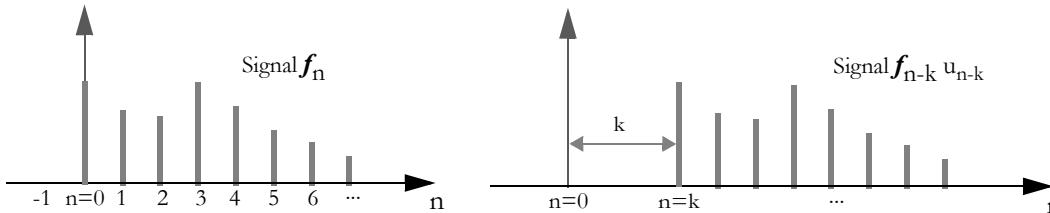
L'expression de la transformée d'une translation de  $k$  périodes antérieures s'obtient correctement en construisant une suite  $g_n$  obtenue en effectuant une translation vers la droite de la série  $f_n$  originale; à cette fin, la série décalée est constituée par le produit de la série originale par une fonction d'échelon unitaire  $u_{n-k}$  qui n'est non-nulle que  $k$  intervalles de temps plus tard.

La nouvelle série est donc  $g_n = f_{n-k} \cdot u_{n-k}$ ; elle se définit par:

$$g_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n < k \\ f_{n-k} & \text{si } n \geq k \end{cases}$$

La Figure 18 fait déraper les signaux, ce que les mathématiques appellent une *translation*.

Figure 18. Expression d'une translation de séries



La transformée est:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n-k} \cdot u_{n-k} \cdot z^{-n} \\
 &= f_0 z^{-k} + f_0 z^{-k-1} + f_0 z^{-k-2} + \dots \\
 &= z^{-k} [f_0 z + f_0 z^{(-1)} + f_0 z^{(-2)} + \dots]
 \end{aligned}$$

Dès lors,

$$(18) \quad Z[f_{n-k} \cdot u_{n-k}] = z^{-k} \mathbf{F}(z)$$

Le cas particulier de  $k=1$ , c'est-à-dire le décalage d'une unité de temps de la série temporelle, implique donc la pré-multiplication par  $Z^{-1}$ , soit:  $Z^{-1} \mathbf{F}(z)$ .

### 3.3 Applications de l'expression de la translation droite

L'expression des décalages par la transformée-z permet de multiples développements, précisément en rendant algébrique le traitement des repères temporels. De cette variété, on extrait ci-dessous trois petits exemples, choisis parce qu'ils sont associés à des processus en économétrie et en gestion. Il s'agit des modèles auto-régressifs – déjà passés de mode, donc moflés sans délibération – du "signal Morse", de l'opérateur "hold", et de z en tant que marqueur temporel.

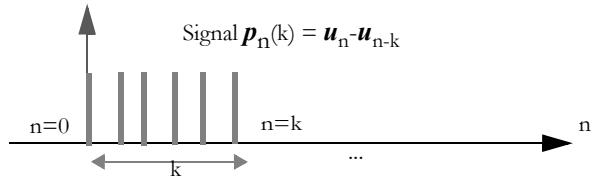
#### 3.3.1 Le signal "Morse"

Un "trait Morse"  $p_n(k)$  – permettant l'usage du fameux code de télécommunication – est une suite formée par un signal d'amplitude unitaire et de largeur  $k$ . Il est donc défini mathématiquement par:

$$p_n(k) = \begin{cases} 1, & \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots, k-1 \\ 0, & \text{pour } n = k, k+1, k+2, \dots \end{cases}$$

Cette suite est obtenue en soustrayant d'un signal unitaire  $u(n)$  ce même signal décalé de  $k$  unités vers la droite, ce qui se voit sur la Figure 19.

**Figure 19. Représentation d'un trait Morse**



Comme on a obtenu que la transformée du signal  $u(n)$  est  $z/(z-1)$ , on a:

$$(19) \quad Z[p_n(k)] = \frac{z}{z-1} \cdot (1 - z^{-k}) = \frac{z^k - 1}{z^k - z}$$

A présent qu'on dispose de (19), on peut se permettre de faire des tas de choses pas convenables, y compris envoyer des messages en Morse (ou SMS). Comme cas particuliers, on retrouve des petits êtres familiers:

- Si le trait est de largeur  $k=1$ , on retrouve l'impulsion unitaire  $\delta_n=1$  en  $n=0$ . Mais il est plus amusant de la pousser un peu vers la droite, et définir  $\delta_{n-1}$ , c'est-à-dire:

$$\delta_{n-1} \text{ si } n=1 \quad \text{et} \quad \delta_{n-1}=0 \text{ si } n \neq 1$$

Il suffit de faire  $k=1$  dans l'expression (19), puis d'appliquer la translation droite, d'où:

$$(20) \quad Z[\delta_{n-1}] = z^{-1}$$

- L'impulsion unitaire à l'origine, donc pour  $n=0$ , se fait en faisant...  $n=0$ . Ainsi:

$$Z[\delta_0] = z^0 = 1$$

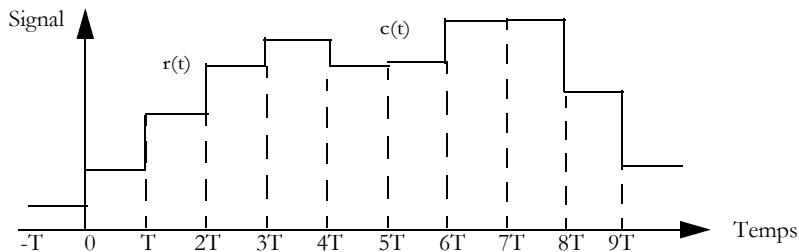
Cette élégance et cette sobriété donnent de l'aisance d'interprétation à cette variable opérationnelle désignée par  $z$ .

### 3.3.2 L'opérateur "hold"

L'opérateur dit "zéro hold" en américain effectue une modulation discrète d'un signal continu en conservant la valeur échantillonnée pendant un intervalle de longueur  $T$  (dans les notations de cette section).

La Figure 20 montre un peu naïvement si cela se passe bien; le modèle mathématique permettant de l'obtenir est une exploitation des différences analogue à celui du trait "Morse".

Figure 20. Opérateur "hold": modulation discrète d'un signal continu



La portée pratique de cet exploit est importante en ingénierie. En effet, le contrôle de processus (réels, industriels) se conduit par un signal de commande appliquée à un dispositif physique et permettant la correction d'écart par rapport à une référence. L'objet d'un tel système de contrôle est de trouver une forme fonctionnelle du signal de contrôle  $e_1(k)$ , à savoir la relation entre le signal de valeur (fonction) de référence  $r(t)$  et la valeur observée de  $c(t)$  qui soit à même de maîtriser le comportement de  $c(t)$  dans le temps.

Ce contrôle se réalise effectivement par une (ou plusieurs) variable décisionnelle ou "manipulable", désignée par  $m(t)$  en tant que fonction temporelle continue. Cette variable (souvent un vecteur) est appliquée au processus pour donner à celui-ci (désigné par  $c(t)$ ) un comportement plus conforme à une référence donnée  $r(t)$ .

### 3.3.3 L'argument $z$ en tant que marqueur temporel

Lorsqu'on considère une *fonction de variables*, on a une expression par laquelle les éléments entrant dans cette fonction sont connectés par des opérateurs. Ainsi en est-il typiquement des polynômes impliquant des puissances de l'argument, disons  $f(x) = b_0 + b_1 x^1 + b_3 x^3 - b_7 x^7$ , ou ce qu'on veut. Le tout est composé, et peu importe l'ordre des termes présents, sinon la logique visuelle de l'expression.

Lorsqu'on parle des *séquences* – le cas de cette section – on a pris la précaution de qualifier "*f*" de *fonction génératrice* des valeurs, lesquelles entrent dans le processus dans un *ordre* déterminé, et cet ordre est pertinent. Il convient donc d'avoir un *indicateur de la place* qu'occupe chaque terme de la série, et de pouvoir conserver ou reproduire cette indication. La lecture de la définition montre que c'est l'exposant de *Z* qui indique cette place dans la séquence... "cet élément est situé il y a mon exposant de décalages d'indice". Mais attention:

- S'il s'agit de repères d'une séquence, c'est-à-dire des valeurs qui arrivent dans l'ordre  $a, b, c, d, \dots$ , le  $d$  arrive avec un décalage de 3 unités; si le *temps* a passé, et que ce sont des intervalles,  $d$  arrive trois périodes plus tard que  $a$ .
- S'il s'agit d'une série chronologique, en revanche,  $d$  est "vieux" de trois périodes de temps, disons trois semaines, par rapport à " $a$ "; cela veut dire, dans le temps réel, qu'il est déjà passé par ici il y a trois semaines, alors que  $a$  arrive seulement "maintenant".

Comme il est antérieur,  $d$  pourrait alors être prédictif de  $a$ , ce qui se passe d'ailleurs dans les modèles de prédiction auto-régressifs.

La Figure 21 expose une petite collection de transformées de décalages.

**Figure 21. Graphe de flux d'équations aux différences**

**Équations avec décalages**

$$\mathbf{g}(k) = \mathbf{f}(k)$$

$$\mathbf{g}(k) = b \mathbf{f}(k-1)$$

$$\mathbf{g}(k) = b \mathbf{g}(k-1)$$

$$\mathbf{g}(k) = b \mathbf{g}(k-1) + \mathbf{f}(k-3)$$

$$\mathbf{g}(k) = \mathbf{f}(k-1) + \mathbf{f}(k-2)$$

$$\mathbf{g}(k) = \mathbf{f}_1(k-1) + \mathbf{f}_2(k-2)$$

**Graphes de flux et  $h_1^T$**

$$\mathbf{f}(k) \xrightarrow{1} \mathbf{g}(k)$$

$$\mathbf{f}(k) \xrightarrow{bZ} \mathbf{g}(k)$$

$$\mathbf{g}(k) \xrightarrow{1/(1-bZ)} \mathbf{f}(k)$$

$$\mathbf{f}(k) \xrightarrow{bZ} \mathbf{g}(k)$$

$$\mathbf{f}(k) \xrightarrow{Z^3} \mathbf{g}(k)$$

$$\mathbf{f}(k) \xrightarrow{Z} \mathbf{g}(k)$$

$$\mathbf{f}_1(k) \xrightarrow{Z} \mathbf{f}_2(k)$$

$$\mathbf{f}_2(k) \xrightarrow{Z^2} \mathbf{g}(k)$$

Le décalage prospectif,  $Z[\mathbf{f}(k+1)]$ , a aussi cette élégante sobriété et interprétation:

$$(21) \quad Z[\mathbf{f}(k+1)] = z^{-1}[\mathbf{f}^T(t) - \mathbf{f}(0)]$$

### 3.3.4 Somme de fonctions génératrices

L'expression de la transformée du décalage, (21) ci-dessus, permet d'exprimer directement la transformée d'une somme, soit:

$$\mathbf{g}(k) = \sum_{j=0}^k \mathbf{f}(k) \quad \text{pour } k=0, 1, 2, \dots$$

La transformée s'obtient en notant que:

$$\mathbf{g}(k) - \mathbf{g}(k-1) = \mathbf{f}(k), \quad \text{où } \mathbf{g}(k)=0 \text{ pour } k<0.$$

Appliquant (21), on a:

$$Z[\mathbf{f}(k)] = Z[\mathbf{g}(k) - \mathbf{g}(k-1)]$$

$$\mathbf{F}(z) = \mathbf{G}(z) - Z^{-1}\mathbf{G}(Z),$$

Ceci conduit au résultat (22):

$$(22) \quad \mathbf{G}(Z) = \frac{Z}{Z-1} \cdot \mathbf{F}(Z) \quad \text{dans le domaine de convergence } |Z| > R^-$$

### 3.3.5 Les différences rétrospectives

La différence rétrospective s'écrit généralement par l'opérateur  $\nabla$  de gradient:

$$\nabla f(k) = f(k) - f(k-1)$$

La transformée s'obtient en appliquant directement le décalage:

$$(23) \quad Z[\nabla f(k)] = 1 \cdot \mathbf{F}(Z) - Z^{-1} \mathbf{F}(Z) = (1 - Z^{-1}) \mathbf{F}(Z)$$

Par induction, (23) se généralise à (24):

$$(24) \quad Z[\nabla^m f(k)] = (1 - Z^{-1})^m \mathbf{F}(Z)$$

Les différences prospectives, soit  $f(k+m) - f(k)$ , impliquent  $(Z-1)^m$ , et sont moins utilisées. Tant mieux.

Le résultat (24) permet d'aborder sereinement les équations linéaires aux différences, où la dynamique de la fonction-réponse,  $\mathbf{g}(k)$ , est auto-régressive et influencée par une séquence pondérée des inputs  $\mathbf{u}(k)$  décalés. Cette formulation date de la section 1, d'où elle est reprise ici en (25) avec ses indices "t":

$$(25) \quad y_t - a_1 y_{t-1} - a_2 y_{t-2} - \dots - a_n y_{t-n} = b_0 u_t + b_1 u_{t-1} + b_2 u_{t-2} + \dots + b_{n-1} u_{t-n+1}$$

Il suffit d'écrire les transformées  $\mathbf{Y}(Z)$  et  $\mathbf{U}(Z)$ , que l'on met en évidence, pour le temps  $t = \text{"maintenant"}$ , puis les opérateurs de décalages, ce qui aboutira à (26):

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(Z) [1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \dots + a_n Z^{-n}] &= \mathbf{U}(Z) [b_0 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2} + \dots + b_{n-1} Z^{-n}] \\ \mathbf{Y}(Z) &= [b_0 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2} + \dots + b_{n-1} Z^{-n}] / [1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \dots + a_n Z^{-n}] \mathbf{U}(Z) \end{aligned}$$

$$(26) \quad \mathbf{Y}(Z) = \mathbf{H}(Z) \cdot \mathbf{U}(Z) \text{ et on a bien la fonction de transfert } \mathbf{H}(Z) = \mathbf{Y}(Z) / \mathbf{U}(Z)$$

La résolution temporelle se fait donc par des opérations algébriques appliquées aux transformées; pour connaître ensuite le comportement de la série temporelle résultante, le truc classique est d'effectuer le rapport des deux polynômes, trouver les racines, puis arroser et laisser pousser la solution qui devrait bientôt bourgeonner. Cependant, c'est si long et ennuyeux que l'on ne fait faire cela que par des élèves.

### 3.3.6 La transformée inverse

L'inversion de la transformée sert à exprimer, et porter en graphique, le comportement de la série d'output dans l'espace temporel, ce qui est évidemment le but de l'analyse du système dynamique. Pour ce faire, on utilise les tables de transformées. Épanouies dans les Golden Sexties, ces tables sont si copieusement garnies qu'on trouve peu de fonctions qui ne figurent pas à leur menu.

Par exemple C.S. BEIGHTLER & al. «A Short Table of Z-transforms and generating Functions», *Operations Research*, Vol. 9, 4, 1961. Il est dommage cependant de faire tant de si belle systémique puis de se contenter d'un mode d'emploi – c'est comme apprendre l'informatique puis utiliser Windows...

De toute façon, il faut torturer les expressions de la fonction-z de transfert jusqu'à ce qu'elles se mettent à table. Alors on n'en montre à présent qu'un seul truc, celui des polynômes, puis on s'occupe d'autre chose.

Lorsque  $Z$  se présente comme une fraction rationnelle, il suffit de diviser le numérateur par le dénominateur pour obtenir une série en  $z^{-1}$  dont les coefficients sont les valeurs de  $f(nT)$  désirées. Soit l'exemple le plus simple:

$$(a) \quad Z[f(t)] = \frac{z}{z - 1/2}$$

Effectuant la division, on obtient:

$$(b) \quad Z[f(t)] = 1.z^0 + 0,5.z^{-1} + 0,25.z^{-2} + 0,125.z^{-3} + \dots$$

$$f(t) = (\frac{1}{2})^0 \cdot \delta(t) + (\frac{1}{2})^1 \cdot \delta(t-T) + (\frac{1}{2})^2 \cdot \delta(t-2T) + (\frac{1}{2})^3 \cdot \delta(t-3T) + \dots$$

$$f(t) = 1 \cdot \delta(t) + 0,5 \cdot \delta(t-T) + 0,25 \cdot \delta(t-2T) + 0,125 \cdot \delta(t-3T) + \dots$$

La division de (a) paraît farfelue. On peut pourtant commencer:

$$z/(z-1/2) \Rightarrow 1 + \text{reste } 1/2/(z-1/2) \Rightarrow 1/2.z^{-1} + \text{reste } 1/4.z^{-1} / (z-1/2)$$

On a donc jusqu'ici:

$$1 + 1/2.z^{-1} + 1/4.z^{-1} / (z-1/2) + \dots \text{ dont le dernier rapport s'arrange comme suit:}$$

$$(c) \quad \frac{z}{z-1/2} = \frac{z/z^2}{(z-1/2)/z^2} = \frac{z^{-1}}{z^{-1} - 1/2 \cdot z^{-2}}$$

De la sorte, on voit comment se dessine la suite avancée en (b) ci-dessus.

Lorsque les degrés du numérateur et du dénominateur sont plus élevés, il est préconisé d'utiliser la formule itérative suivante:

$$\begin{aligned} Z[f(t)] &= \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}} \\ &= s_0 + s_1 z^{-1} + s_2 z^{-2} + \dots \end{aligned}$$

où:

$$s_k = a_k - \sum_{i=1}^k b_i \cdot s_{k-i} \quad \text{avec} \quad a_k = 0 \text{ pour } k > n$$

En effet, il suffit de partir de l'égalité:

$$a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n} = (1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}) \cdot (s_0 + s_1 z^{-1} + \dots)$$

On en tire:

$$a_k = \sum_0^k b_i \cdot s_{k-i} \equiv s_k + \sum_1^k b_i \cdot s_{k-i}$$

Et voilà le mode d'emploi officiel; le vrai consiste, comme toujours depuis qu'existent les examens écrits, à recopier le résultat de quelqu'un qui l'a déjà obtenu.

### 3.3.7 Conditions de stabilité

Une contribution majeure de l'exploitation des transformées est de prédire le comportement des fonctions temporelles soumises à un input, avec pour thème privilégié la stabilité de cet output. Ceci inclut toute une panoplie de domaines d'études, entre autres tout ce qui se formule en équations différentielles ou aux différences, la stabilité des régimes périodiques ou encore la convergence de processus itératifs de calcul numérique par les ordinateurs.

On n'a pas besoin de tout cela ici – ce parcours est avant tout fait pour renseigner sur les rites de certaines sectes infiltrant des systèmes dans la gestion; voici seulement le principe général du test standard de stabilité pour les systèmes à coefficients constants.

Dans ce contexte, un système linéaire discret est considéré comme stable si à tous les inputs bornés correspondent des inputs bornés. Cette propriété s'explique en séparant l'output – donc la réponse du système aux inputs – en deux parties: d'une part celle qui est associée au régime final (due à la fonction d'input) et d'autre part celle qui est associée au régime transitoire.

La transformée de l'output s'exprime donc par le produit de la transformée de l'input par la transformée de la fonction de transfert. Celles-ci sont à exprimer par le rapport de deux polynômes, dont la factorisation donne au dénominateur des facteurs en " $(z-r_j)$ ". Ces  $r_j$  sont les "pôles" de la fonction: le dénominateur s'annule pour ces valeurs (ce qui leur fait porter le nom de "valeurs singulières"), et fait exploser la fonction de transfert. L'effet est immédiat: la dynamique hésite, se pâme dans des états transitoires, oscille entre plusieurs directions, puis les pôles la font diverger et soudain, par une aspiration irrésistible, emportent le tout, sentiments, pique-nique et carte de banque, vers un infini qui brille au bout du tunnel.

Pour éviter les instabilités et les divergences extrêmes qui viennent d'être évoquées, il faut et il suffit de rester modeste: si on ne considère que le cas linéaire courant, il faut et suffit de garder son " $z$ " dans son rayon de convergence, soit, en valeur réelle:

$$|z| \leq 1$$

### 3.3.8 Valeurs initiale et finale

L'apport de l'expression de la valeur initiale et de la valeur finale est de permettre de connaître la valeur d'origine de la série,  $f(0)$ , lorsque sa transformée (unilatérale) est connue. De même, on peut s'intéresser à sa limite pour  $k \rightarrow \infty$ .

Se rappelant que, sur la suite  $f_n$  définie sur les entiers positifs (0, 1, 2, ...), la fonction  $F(z)$  a été définie en (23) rappelée ci-dessous:

$$(23) \quad F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k} = f_0 + f_1 \cdot z^{-1} + f_2 \cdot z^{-2} + \dots$$

De (25), et de la convergence pour tout  $|z| > R$ , il résulte que:

$$f(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(z)$$

Cette propriété sera exploitée explicitement à la section 4.2.2 pour exprimer les biais à long terme de modèles linéaires d'extrapolation.

### 3.3.9 Expressions canoniques des transformées de modèles linéaires

L'extension à plusieurs inputs et outputs s'exprime en les vecteurs respectifs et en adaptant les dimensions matricielles des *opérateurs* en conséquence de cette extension de l'espace de référence; le modèle *linéaire* a dès lors des opérateurs *matriciels*. Ceci autorise une même écriture synthétique pour un processus temporel plus général, exprimé en discret par (27)-(28) qui reprennent le (17)-(18) initié à la section 1.3.4:

$$(27) \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k$$

$$(28) \quad \mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{d} \mathbf{u}_k$$

Ceci forme les expressions dites *canoniques* des transformées de modèles linéaires, dont les évolutions temporelles sont les suivantes respectivement en discrète et continue:

$$z \mathbf{Y}(z) - z \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{b} \mathbf{Y}(z) + \mathbf{b} \mathbf{R}(z)$$

$$s \mathbf{Y}(s) - \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{b} \mathbf{Y}(s) + \mathbf{b} \mathbf{U}(s)$$

C'est une synthèse des apports formels parcourus dans cette section. Leur construction plus systématique et leur exploitation est une référence commune aux trois exposés sur «Les dynamiques» du Tome Nord.

## 3.4 Résumé de l'exploitation des transformées

### 3.4.1 Propriétés des graphes de flux

Les propriétés des graphes de flux de transformées permettent des simplifications du design processus en interaction par la composition algébrique des signaux, donc contribuent à la réduction de modèles. Les grands classiques sont évidemment les processus en série, en parallèle et en feed-back.

La condition de validité est d'obtenir la même *fonction de transfert*; la portée pratique de cette condition est que, si l'on soumet un input au processus, l'expression de l'output soit la même quelle que soit la configuration choisie pour décrire le processus.

Cette modélisation est une aide à l'analyse de système par investigation formelle des propriétés du système. La procédure traditionnelle à cette fin est de:

- Déterminer les équations ou la fonction de transfert de chaque composante du processus (elles ne sont pas uniques);
- Choisir un modèle de représentation, par exemple la configuration par blocs, ou le graphe de flux de signaux;
- Formuler le modèle en connectant les composantes (noeuds, branches, blocs) de façon appropriée; notons que cette approche "modulaire" convient à l'analyse, mais qu'elle est utilisée pour faire le "design";
- Déterminer les caractéristiques du système, avec pour objectifs de connaissance:
  - Les propriétés de stabilité;
  - Le régime en état stabilisé;
  - Le comportement et la longueur de l'état transitoire.

Les méthodes classiques, de présentation graphique mais reposant sur l'analyse mathématique, pouvant aider l'analyste sont:

- La méthode de localisation des racines (le "root-locus"), c'est-à-dire les "pôles" de la fonction de transfert; les suivantes sont dans le domaine des fréquences;
- Les graphes de NYQUIST, procédures graphiques visant à diagnostiquer les stabilités absolue et relative des systèmes de contrôle à boucle fermée, par le graphique de la fonction de transfert du système à feed-back mis sous forme canonique;
- La représentation de BODE, s'intéressant à l'angle de phase de la fonction de réponse;
- Les chartes de NICHOLS représentant les fonctions fréquentielles de réponse;
- On dispose de certains théorèmes de stabilité, telles que les conditions LYAPOUNOV, mais celles-ci ne seront dévoilées que par l'accès aux archives du KGB – donc pas pour un Lecteur très ordinaire.

L'analyse de ces propriétés est incomparablement plus simple lorsque les systèmes dynamiques sont linéaires – typiquement les équations aux différences ou différentielles – ou qu'on peut les ramener à la linéarité par des transformations, approximations et tricheries.

### 3.4.2 Performances des processus

Les performances de processus formels sont spécifiques selon le domaine (*temporel* ou *fréquentiel*) de leur expression. Elles s'expriment généralement en termes de la réponse; elles concernent trois propriétés importantes des systèmes dynamiques:

- La vitesse de réponse;
  - La stabilité relative;
  - L'adéquation, la précision, l'erreur relative tolérée.
- 
- Dans le cas des *filtres*, la performance s'exprime, presque par la définition d'un filtre, en termes de minimisation de l'interférence par rapport au signal, la tradition faisant le rapport signal/bruit. Des propriétés (requises pour que le filtre soit admissible) sont le fait d'être convergent et non-biaisé;

- Dans le cas de l'*ajustement* statistique, la performance s'exprime en termes de variance des résidus, ce qui équivaut à la qualité de la description du modèle par rapport aux observations;
- Dans le cas des *morphions*, et surtout des bougies japonaises (décris dans les « Modèles de processus»), les critères sont moins incontestables, en raison de la composante subjective des morphions. En fait le critère est plutôt associé à la procédure, c'est-à-dire au nombre d'itérations de l'heuristique servant à les diagnostiquer.

### 3.4.3 Critères dans le domaine temporel

Dans le domaine temporel, les critères usuels concernent d'une part les comportements transitoires, normalement décrits en termes de réponse à des fonctions d'inputs élémentaires, telles que l'impulsion, la marche, la rampe, la parabole et, d'autre part, le comportement final, c'est-à-dire en régime définitif:

- Le *délai*, souvent défini par le temps requis pour que la réponse atteigne un pourcentage donné, par exemple 50%, de sa valeur finale;
- Le *temps de croissance*, ou temps requis pour que la réponse passe de a% (disons 10%) à b% (disons 90%) de sa valeur finale.
- Le *temps d'établissement*, c'est-à-dire le temps requis pour que la réponse à un input unitaire reste dans des bornes spécifiées;
- La *constante temporelle prédominante* mesure le caractère décroissant de la réponse transitoire.

Du point de vue de l'état final, les propriétés sont:

- L'*overshoot* qui est une mesure de stabilité relative. C'est la différence maximale entre les solutions transitoire et finale pour un input unitaire (il est souvent exprimé en % de la solution finale);
- L'*adéquation* et la *précision* concernent les mesures d'erreur de l'état final résultant d'une application d'input spécifié. Un exemple facile et courant en est donné ici pour l'interpolation par le lissage exponentiel qui se vend si bien.

### 3.4.4 Critères dans le domaine fréquentiel

- La *marge de gain* est une mesure de stabilité relative, égale à l'inverse de la valeur de la fonction de transfert de la boucle ouverte, évaluée à la fréquence à laquelle l'angle de phase est de  $-\pi$  (donc au changement de phase);
- La *marge de phase* est de 180 degrés plus l'angle de phase de la fonction de transfert – en boucle ouverte – au gain unitaire; le *délai*, quant à lui, s'exprime en fréquence moyenne, mais ne s'interprète pas de façon évidente.
- La *largeur de bande* est l'intervalle de fréquence de l'input pour lequel le système répond de façon satisfaisante (par exemple de 20 à 20000 cycles par secondes pour un amplificateur dit de haute fidélité).

La contribution de ces études de performance est de faire du *design par analyse*, lequel est accompli en modifiant les caractéristiques d'un système existant en affectant sa structure; le schéma général de cette procédure figure dans «La Genèse», sous le titre «Analyse d'un système-objet». Le but est de lui faire rencontrer des spécifications de performances, celles-ci sont exprimées par des variables de références et des contraintes.

On en verra une généralisation via la téléconomie et les "changements désirables et faisables" lors de l'investigation et l'intervention dans les Ensembles d'Activités Humaines, thèmes qui ont le plus de succès dans le Tome d'Ouessant.

## 4 Deux modèles de processus en gestion

### 4.1 La fonction de trésorerie

#### 4.1.1 Formulation de mouvements de liquidités

Soit  $L$  le niveau de Liquidités monétaires de l'Association de Systémique "Joie et Santé". Ce niveau au moment  $k$  se constitue par le niveau précédent ( $L_{k-1}$ ) plus les manipulations ( $m_k$ ) moins les dépenses ( $d_k$ ). Ces notations ne sont pas au hasard:

- "L" tient pour "Level" en américain. Cette variable représente donc un *accumulateur* dans le domaine discret (ce serait un *intégrateur* dans sa version continue);
- "m" indique une variable "*manipulable*", c'est-à-dire, selon la tradition écrite, une variable de *commande*. Elle sera plus explicite à la section 7 mais, dans le cas présent, il s'agit simplement de retraits ou dépôts dans les comptes de réserve; ses unités sont donc celles d'un flux, une quantité par unité de temps;
- "d" indique les *dépenses*, qui sont un flux exogène, c'est-à-dire non maîtrisable par le trésorier – le "*contrôleur*" du système. Quand il sera adulte, ce *d* deviendra un jour une "*driving matrix*".

La description de mouvements de liquidités est donc:

$$(a) \quad L_k = L_{k-1} + m_k - d_k$$

Quand à la politique de contrôle, elle consisterait à faire des ponctions ou retraits de réserves de façon à garder le niveau de trésorerie proche de zéro. Une formulation très simple est une moyenne mobile des derniers niveaux, disons les deux derniers:

$$(b) \quad m_k = - \frac{1}{2}[L_{k-1} + L_{k-2}]$$

Comme ce sont les dépenses  $d_k$  qui "tirent" le processus, et que c'est la variable de décision  $m_k$  qui intéresse le gestionnaire, celles-ci seront respectivement l'input et l'output du processus. C'est ce que montre la Figure 22, où:

- L'impulsion  $d_k$  entre avec le signe négatif;

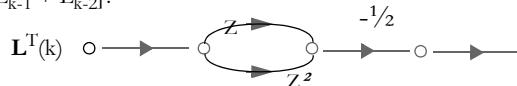
- L'accumulateur  $L_k$  est la rétromettance élémentaire conservant une unité lorsqu'elle est ajoutée, c'est-à-dire la réponse à une impulsion unitaire 1, 0, 0, ... soit  $L(Z) = 1/(1-Z)$ .

Figure 22. Réduction du graphe de flux de... liquidités

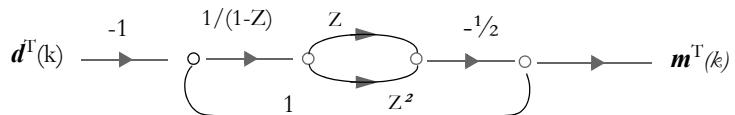
Processus de base:



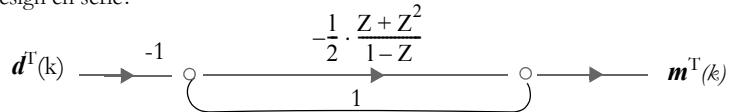
Moyenne mobile  $L_k = \frac{1}{2}[L_{k-1} + L_{k-2}]$ :



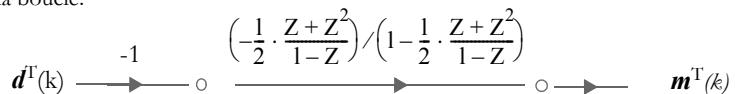
Composition:



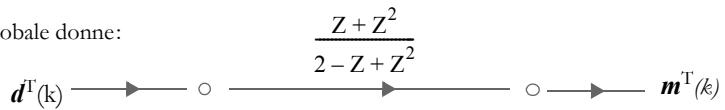
Réduction du design en série:



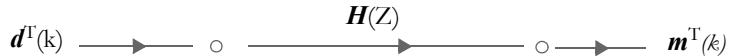
Réduction de la boucle:



La réduction globale donne:



Soit:



La fonction de transfert est écrite  $H(z)$ . Il convient à présent de l'élucider pour exprimer la transformée inverse, dans le domaine temporel. A cette fin, on effectue la "longue division", de ces deux polynômes, et on retient les coefficients du quotient comme éléments séquentiels de la série  $m(k)$  résultante. Ces coefficients donnent:

$$(c) \quad m(k) = 0, 1/2, 3/4, 1/8, -5/6, -7/32, 3/64, \dots$$

Il est manifeste que, sous l'effet de l'impulsion, (c) vacille un peu d'un signe à l'autre, mais ses oscillations s'amortissent, et le processus est donc *asymptotiquement stable*.

Mathématiquement, cette propriété est obtenue sous la condition:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{Z \rightarrow 1} (Z - 1) f^T$$

Tandis qu'on a déjà vu que, de l'autre côté de... l'infini:

$$f(0) = \lim_{Z \rightarrow \infty} f^T$$

#### 4.1.2 La variété des temps

L'étude et la formulation de modèles de trésorerie demande une incursion générale du processus global de l'EAH, de l'établissement concerné, et spécifiquement ceux qui engendrent des flux ayant leurs équivalents monétaires. Bien entendu, quelles qu'en soient les voies et la complexité, le regard ne s'allume que lorsqu'il se penche in fine sur ce qui reste concrètement dans la caisse, en fait le solde de trésorerie nette; celui-ci peut être constitué des divers instruments de paiement disponibles dans l'immédiat. Ce solde est la résultante en temps réel de multiples processus qui ont des "timings" différents, ne forment pas des cycles imbriqués, et impliquent à la fois les engagements et les mouvements courants de l'exploitation.

Plus généralement, la doctrine de la trésorerie suggère un partitionnement en "timings" de plus en plus serrés que l'on peut résumer par le Tableau 3. La hiérarchie temporelle peut se construire soit par type d'activité – de la basse à la haute fréquence, ce que fera un peu la Figure 23 –, soit par type de transaction financière, caractérisée par le "terme" temporel, ce qui est le cas du Tableau 3. Il n'y a pas de "cycle" puisque les échéanciers se créent et se recouvrent continuellement.

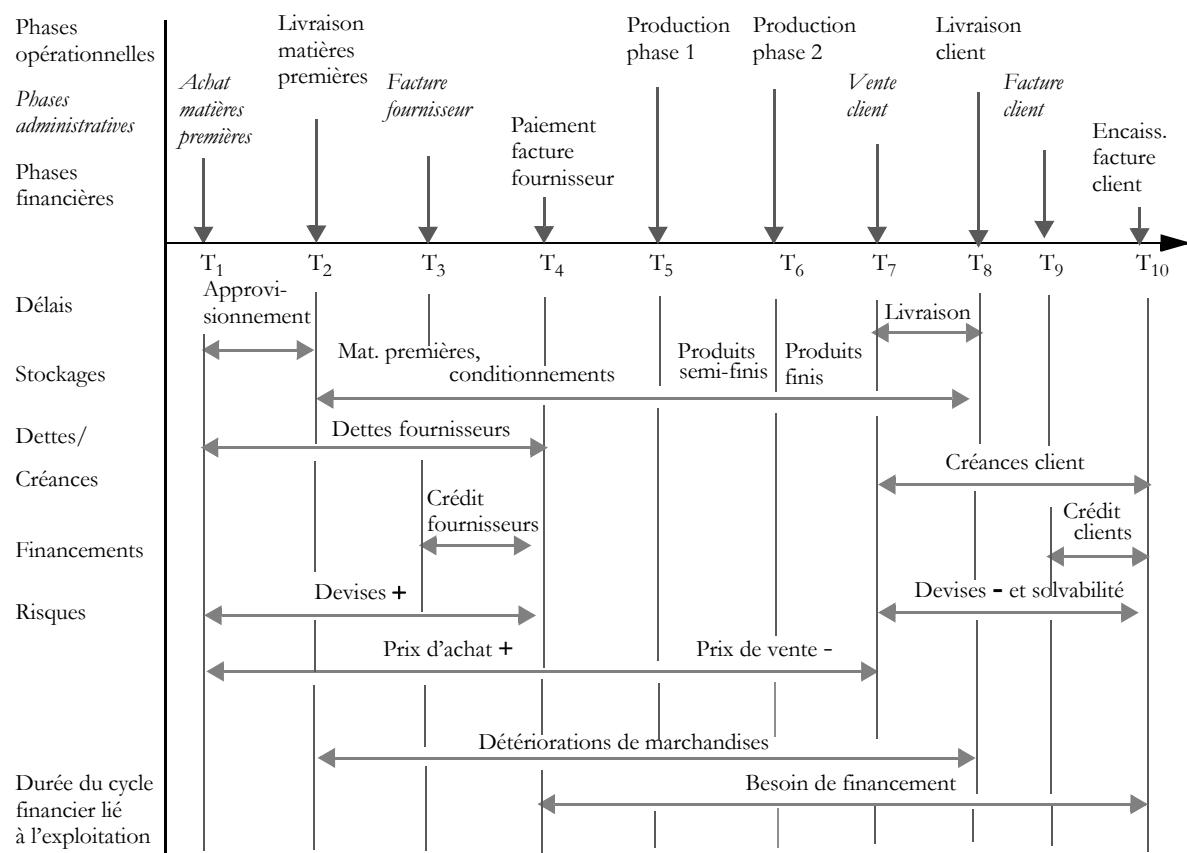
Tableau 3. Variations de trésorerie selon leur timing

| Patrimoine                                   |  | Finance à M.T.   |                   | Exploitation            |                           |
|--|--|------------------|-------------------|-------------------------|---------------------------|
| P +  | P -  | F +              | F -               | E +                     | E -                       |
| Bénéfices                                    | Pertes   | Emprunts         | Placements        | Recettes d'exploitation | Dépenses d'exploitation   |
| Amortissements                               | Reprises sur amortissements; réduc. de valeurs | Crédits obtenus  | Avances aux tiers | Emprunts à court terme  | Placements à court terme  |
| Emprunts à L.T.                              | Remboursements                                 | Avances reçues   |                   |                         | Remboursements de crédits |
| Cessions d'immobilisés                       | Transferts aux réserves                        | Leasings obtenus |                   |                         |                           |
| Subsides; augmentation de capital en espèces | Investissements; Reprises immobilisés          | Aléas devises    |                   | Aléas fiabilité clients |                           |
| Avances permanentes des associés             | Bénéfice distribué                             |                  |                   |                         |                           |

Quant à l'approche du "processus global", il y en a plusieurs exemples particulièrement spectaculaires dans ces exposés, tels le processus du patient hospitalier (à la fin des «Modèles de Processus»), ou celui d'une entreprise de pompe de chaleur (dans «Le Domaine de la gestion»), ou encore les schémas d'intégration de données d'une ville, figurant dans les «Processus et synthèses d'information» du Tome d'Ouessant.

Présentement, plus focalisé et dédiacé au problème de la trésorerie, on retrouve page 29 PH. KNEIPE, *Gestion de la trésorerie de l'entreprise*, (De Boeck Université, Bruxelles, 1987) une «Figure 2» ayant pour titre «Schéma de synthèse de l'évolution temporelle des phases du cycle d'exploitation». Ce schéma ne concerne que l'«entreprise» typique de production-vente, mais a au moins le mérite de la clarté. La Figure 23 essaie de refaire correctement cette présentation, car l'ouvrage ne paraît plus aisément disponible, mais comme toujours seule la lecture de la référence citée peut respecter l'apport de cet auteur.

**Figure 23. Phases d'une exploitation industrielle du point de vue de la trésorerie**



Refait de: «Schéma de synthèse de l'évolution temporelle des phases du cycle d'exploitation» (op. cit. p.29)

La variété de "timings" de processus d'activités rendrait donc pusillanime de vouloir confier aux instruments formels de théorie des systèmes la modélisation – puis la maîtrise et les décisions concernées – de cette tâche très importante de la gestion, vu le nombre de facteurs, de paramètres et de fenêtres temporelles à prendre en considération si l'on veut être rigoureux, c'est-à-dire, in fine, "tomber juste" dans les comptes.

La théorie des systèmes, la modélisation de processus, va-t-elle alors tourner lâchement le dos là où justement on croyait qu'elle pouvait se rendre utile? La réponse à cette question angoissante, le "thriller" des systèmes, est dans notre prochain numéro.

Que non point! On va glisser d'autres morceaux choisis de systémique dans la caisse:

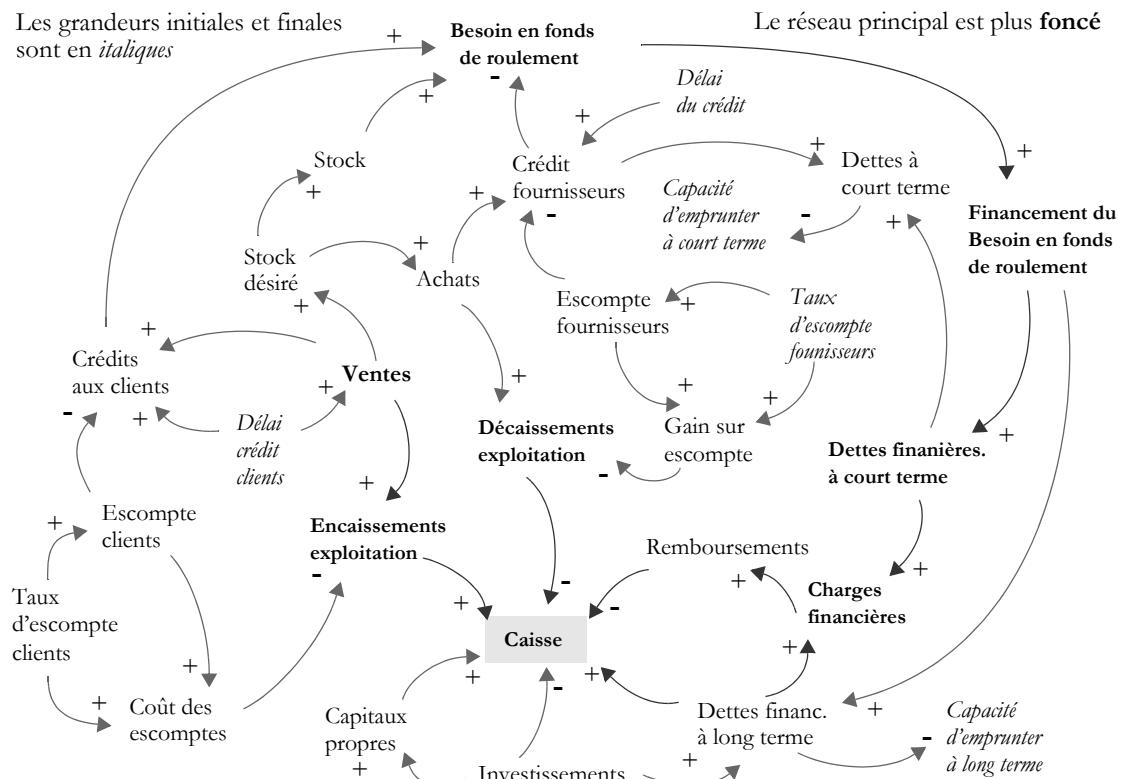
- La mise des éléments de ce Tableau 3, ainsi que d'autres aussi intelligibles, en un "graphe d'influence";
- Ensuite, répondant à la demande de Lectrices frétilantes, on cédera au caprice d'écrire un petit modèle naïf de processus temporel avec des conditions initiales;
- Enfin sera dessiné un schéma-type (publié) d'un progiciel de trésorerie standard, tenant compte de la hiérarchie temporelle. Pour le reste, faudra aller surfer ailleurs.

#### 4.1.3 Graphe d'influence

La Figure 24 est une proposition de graphe d'influence intégrant la plupart des éléments cités. Il serait fort utile pour formuler un modèle de dynamique des systèmes en gestion et en faire un simulateur de situations de trésorerie résultant de situations et de décisions variées.

Ce n'est toutefois *pas un schéma de calcul*; on y lit bien d'ailleurs que plusieurs variables désignent des *facteurs* faisant partie du processus mais non des flux et des comptes.

Figure 24. Proposition de graphe d'influence de la trésorerie



#### 4.1.4 Un mini-modèle de trésorerie

Par esprit d'économie, on va généreusement offrir une petit modèle d'analyse de liquidités à la désormais célèbre ASLJSIGASRH, Association de Systémique et Loisirs "Joie et Santé" de l'Institut de Gériatrie d'Anguille-Sous-Roche. Bien sûr, les grands théories et schémas globaux sont laissés au vestiaire (près des verres à bulles pour mettre le dentier, sous le crochet pour suspendre la sous-ventrière), mais on s'occupera de la petite caisse du bar, dérisoire peut être mais sûrement ration de survie de cette éminente Société.

Soit  $L$  désignant le niveau ("Level" en anglais) de Liquidités, le trésor disponible en caisse le dimanche soir après la troisième mi-temps. Ces liquidités forment un *stock* en économie, formé par un *accumulateur* (une intégrale) en systémique. C'est la variable *endogène* du modèle, donc résultante des relations traduisant les valeurs des mouvements et des flux.

Les variables sont dites *exogènes* lorsqu'elles sont fournies au modèle (donc à l'analyste et au décideur) sans y être engendrées. Elles peuvent être issues de comportements d'agents, ou de phénomènes extérieurs, mais personne n'en a la maîtrise dans la problématique sous revue.

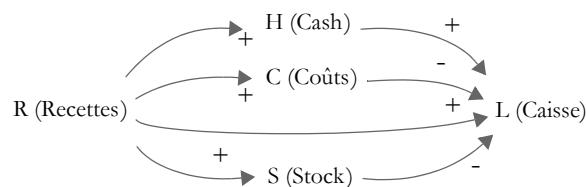
Les variables sont dites de *décision* lorsque leurs valeurs peuvent être choisies par l'analyste (ce sera souvent aux fins de simulation) ou par le décideur (aux fins de traduire une *politique*).

Les *paramètres* calibrent les relations entre les grandeurs en présence. Le choix ou l'estimation de leurs valeurs est fondé sur diverses considérations dont il est question dans l'exposé sur les «Modèles de processus», précisément la section sur l'*élucidation*, et surtout dans l'exposé sur la «Dynamique de systèmes en gestion».

Les modèles plus habillés utilisent aussi des variables dites *auxiliaires*; les relations "passent" en quelque sorte par celles-ci pour en exprimer d'autres qui sont des clefs de l'analyse. Ainsi le *nombre de clients* peut être requis pour estimer le chiffre d'affaires.

On sera frustré de ne pas en voir de toutes ces couleurs dans le petit machin qui suit, mais il y en a beaucoup de chatoyantes dans la «Dynamique de systèmes en gestion». En attendant, le modèle répond au graphe orienté (ni boucle ni interaction) de la Figure 25.

Figure 25. Vilain petit graphe d'influence de la caisse



#### 4.1.5 Formulation

Le niveau  $L_k$  est toujours exprimé par le précédent,  $L_{k-1}$ , plus sa variation  $\Delta$ :

$$(1) \quad L_k = L_{k-1} + \Delta L$$

La génératrice de la dynamique de la trésorerie est le bar du club. Soit  $R$  la recette, qui croît avec l'avancement de la saison de la pétanque et de la température. Disons que sa croissance autonome est de 20% par semaine, soit:

$$(2) \quad R_k = a.R_{k-1}$$

Le paramètre  $a$  est exogène, rendant la variable  $R_k$  exogène, mise en italique pour cette raison. Soit que les poivrots paient 40% cash ( $H$ ), et mettent en ardoise ( $A$ ) les 60% restants pour la période suivante (Plus sérieux les comptables l'appellent "effets à recevoir", lesquels résultent du crédit accordé aux clients):

$$(3) \quad H_k = b.R_k$$

Soit un ajustement du stock (en valeur courante) par la moitié de la variation de consommation. Cette politique "rule of thumb" ("règle du pouce") remplace avantageusement, par son élégante simplicité, des tas de modèles de systèmes qu'on ne comprend jamais:

$$(4) \quad \Delta S = d.(L_k - L_{k-1})$$

Ceci revient à écrire que la valeur du stock ( $S$ ) est de 50% de la valeur des ventes d'une période (semaine). Quant au coût des produits vendus, il est de 90% de la recette, soit:

$$(5) \quad C_k = c.L_k$$

Réunissant les composantes déposées ci-dessus, on obtient la relation d'évolution temporelle (6):

$$(6) \quad L_k = L_{k-1} + H_{k-1} + (1-b).R_k - C_k - \Delta S_k$$

Les paramètres sont constants (il n'est pas écrit  $a_k$  ou  $a(t)$ ), de sorte que le modèle est dit à coefficients constants, ou *invariant*. Une des implications de cette propriété (outre la simplicité) est qu'une translation temporelle ne modifie pas le comportement; on aurait ainsi les mêmes relations quelque soit la saison ou indépendamment de périodes spécifiques. Lorsque la formulation exprime les paramètres avec un indice temporel, elle est bien sûr qualifiée de variante. Forcément elle est plus compliquée mais plus réaliste.

Si les paramètres s'ajustent en fonction de valeurs de variables endogènes ou auxiliaires, le modèle est dit "adaptatif"; ce serait le cas ici si le taux d'ajustement du stock (le paramètre  $d$  ci-dessus) était modifié en fonction du taux de la consommation.

Le paramètre  $b$  de cette formulation peut être considéré comme décisionnel; en effet, le gestionnaire pourrait établir le rapport de créance admissible; il pourrait aussi sur le délai du crédit, par exemple autoriser  $s$  semaines, ce qui impliquerait  $H = f(R_{k-s})$ . Plus généralement, dans un vrai modèle de trésorerie, on sait qu'une des manœuvres du gestionnaire est de calibrer la relation entre le crédit accordé aux clients et celui accordé par les fournisseurs – ce qui a des implications sur le besoin en roulement.

Le paramètre "d", d'ajustement du stock, est aussi un paramètre de "politique", où seule est vue ici l'implication sur la caisse, mais, plus généralement se présente aussi toute la question de la régulation de l'approvisionnement en relation avec les coûts de stockage, les risques de pénurie et le besoin en fonds de roulement, bref toute une aventure de... systèmes en gestion.

On peut à présent exprimer l'évolution du niveau de liquidités en remplaçant les variables auxiliaires par leur expression en fonction de la recette  $R$ , qui est le "leader" de cette petite dynamique :

$$(7) \quad L_k = L_{k-1} + b \cdot R_k + (1-b) \cdot R_{k-1} - c \cdot R_k - d \cdot R_k + (1-d) \cdot R_{k-1}$$

Si  $b = (c+d)$ , alors le coefficient de  $R_k$ , la recette actuelle, s'annule, et le modèle n'a plus de sens; mais cela signifierait que le ratio de crédit au client ( $b$ ) serait négatif – il devrait payer cash 40% de plus que le prix – bref, il vaut mieux regarder ce que signifient les paramètres. Soit ici  $b=(c+d)-1$ , ce qui simplifie (7) en (8)

$$(8) \quad L_k = L_{k-1} - R_k + (2-b-d) \cdot R_{k-1}$$

Posons  $(2-b-d)=p$ , de sorte que le modèle se rétrécit en (9) et (10):

$$(9) \quad R_k = a \cdot R_{k-1}$$

$$(10) \quad L_k = L_{k-1} - R_k + p \cdot R_{k-1}$$

Le principe de l'analyse de processus (puis de systèmes, quand on sera adulte) est d'exprimer l'output – ce sera le niveau de la caisse – en fonction de l'input (les recettes  $R$ ) via la fonction de transfert ( $H$ ), donc d'arriver en bonne santé à la séquence:  $R -> H -> L$ .

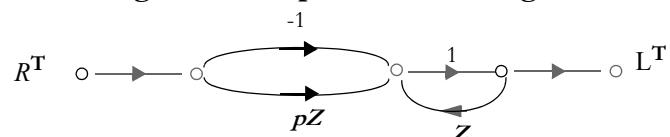
#### 4.1.6 Analyse par la transformée-z

Ce type de *contrôle* élémentaire est pratiqué par des trésoriers qui ont des petits talents cachés de systémiciens. La "longue division", en revanche, n'a pas été faite ici: on a déjà dit que c'est un truc si exaspérant et emmerdatoire qu'il est encore responsable de présence d'élèves de 18 ans dans le cycle inférieur. Sa vertu est cependant de pouvoir lire des choses simples en se mettant à table devant celle des transformées inverses. La transformée de (9) est à vue:

$$(11) \quad R^T = 1 / (1-az)$$

Quant à (10), elle s'accouple en parallèle puis en série selon la Figure 26:

Figure 26. Graphe de flux de signaux de la caisse



Le couplage du graphe 25 avec la transformée de l'input donnée par (5) donne:

$$L^T = \frac{1}{1-az} \cdot \frac{-1+pz}{1-z} = \frac{-1+pz}{1-(1+a)z+az^2}$$

La division des polynômes fournit la série:

$$L^T = -1 - pz - qz^2 \dots \text{(on fera la suivante, c'est promis).}$$

#### 4.1.7 Les conditions initiales

Des grandeurs indispensables pour lancer un processus sont les conditions initiales, les valeurs au temps  $k=0$ , – mais on ne dit jamais où est cette origine, ou "quand commence la dynamique". Formellement, elles font surface en exploitant la transformée d'un décalage prospectif, c'est-à-dire, pour les deux variables auto-régressives  $L$  et  $R$ , l'expression:

$$(12) \quad Z(L_{k+1}) = Z^1(L^T - L_0)$$

$$(13) \quad Z(R_{k+1}) = Z^1(R^T - R_0)$$

La formulation trop simpliste oblige à donner artificiellement une valeur initiale à  $R$  pour engendrer son auto-régressivité, mais c'est un flux, qui n'a donc pas de stock de départ; s'il fallait programmer le modèle par simulation, il faudrait utiliser une variable auxiliaire. Ceci dit, on verra tout de suite que ceci revient à utiliser un input des recettes qui est équivalent à une impulsion unitaire initiale. Le truc est d'écrire (12) avec un décalage prospectif, puis de l'exprimer selon  $L_k$ , soit:

$$L_{k+1} = L_k - R_{k+1} + p \cdot R_k$$

$$(14) \quad L_k = L_{k+1} + R_{k+1} - p \cdot R_k$$

Appliquant les transformées du décalage prospectif, soit (12) et (13), on obtient la solution, illustrée ensuite par la séquence de graphes 27.

L'expression de l'output en fonction des conditions initiales et de l'influence de l'input, c'est-à-dire la lecture du graphe de flux réduit:

$$L^T = [-z^{-1} \cdot (L_0 + R_0) + R^T \cdot (z^{-1} - p)] \cdot \frac{1}{1-z^{-1}}$$

La prémultiplication du premier terme par  $z/z$  donne le partitionnement voulu:

$$(15) \quad L^T = \frac{-1}{z-1} \cdot (L_0 + R_0) + R^T \cdot \frac{z^{-1} - p}{1-z^{-1}}$$

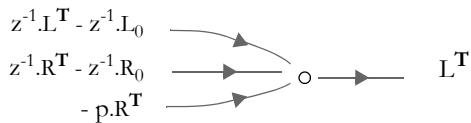
Cette dernière équation peut être représentée selon un système matriciel dans lequel les inputs sont:

- Les valeurs initiales appliquées à une impulsion unitaire (de transposée  $1/(z-1)$ );
- La partie de la fonction de transfert "dynamisant" la transformée de l'input:

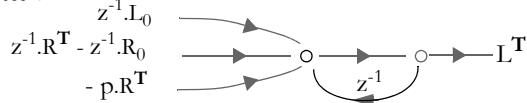
$$(16) \quad y^T = H^T \cdot x^T$$

Figure 27. Réduction du graphe de liquidités

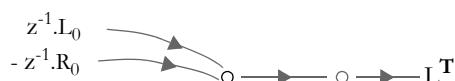
Faire le design de (4):



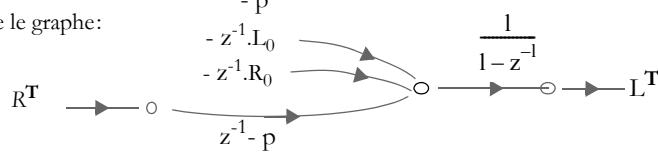
## Boucler l'auto-régressif:



Entrer par l'input:



Réduire le graphe:



L'expression (16) s'écrit ici:

$$(17) \quad \mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} -L_0 - R_0 & z^{-1} - p \\ z - 1 & 1 - z^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^T \\ R^T \end{bmatrix}$$

Comme la recette est auto-générée par  $R_k = a.R_{k-1}$ , la transformée est:

$$(18) \quad \mathbf{R}^T = \frac{\mathbf{R}_0}{1 - a + z}$$

L'analyste peut alors exprimer le comportement dans le temps de l'output et sa sensibilité aux paramètres et valeurs exogènes.

Soit un essai avec les valeurs suivantes:

- $a = 1,2$  (croissance de la Recette)
  - $b = 0,4$  (pourcent payé cash)
  - $c = 0,9$  (part du coût dans le prix)
  - $d = 0,5$  (ajustement du stock)
  - $R_0 = 24$  (Recette initiale)
  - $L_0 = 30$  (Liquidités initiales)

Le développement de (17) est:

$$(19) \quad L^T = \frac{-25}{1-z} - \frac{30}{1-z} + \frac{30}{1-1,2 z} \cdot \frac{z^{-1}-1,1}{1-z^{-1}}$$

Pour exprimer la transformée inverse (revenir dans le domaine temporel), on peut faire la longue division de (19), qui est très courte:

$$\begin{aligned}
 L^T &= \frac{-24}{z-1} - \frac{30}{z-1} + \frac{30}{1-pz} \cdot \frac{1/z-1,1}{1-1/z} \\
 &= \frac{-24}{z-1} - \frac{30}{z-1} + \frac{30}{1-pz} \cdot \frac{1-1,1z}{z-1} \\
 &= \frac{54}{1-z} + \frac{30 \cdot (1-1,1z)}{(1-pz) \cdot (z-1)} \\
 &= \frac{54}{1-z} + \frac{A}{1-pz} + \frac{B}{1-z}
 \end{aligned}$$

L'identification des numérateurs s'écrit:

$$A(1-z) + B(1-pz) = -30 + 33z$$

En exploitant les deux racines, on a:

$$\text{Pour } z=1, \quad B(1-p) = 3, \quad \text{d'où: } B = 3/(1-p)$$

$$\text{Pour } z=1/p, \quad A(1-1/p) = -30+33/p, \quad \text{d'où: } A = (33-30p)/(p-1)$$

Donc,

$$L^T = \frac{54}{1-z} + \frac{3/(1-p)}{1-z} + \frac{(33-30p)/(p-1)}{1-pz}$$

On peut voir l'évolution selon différents taux de croissance supposés des recettes, soit le paramètre  $p$ . Ainsi, pour  $p=1,2$ , ( $R_k = 1,2R_{k-1}$ ), on a:

$$L^T = \frac{54}{1-z} + \frac{3/(1-p)}{1-z} + \frac{(33-30p)/(p-1)}{1-pz}$$

$$L^T = \frac{39}{1-z} - \frac{30}{1-1,2z} \quad \text{Donc } L_k = 39 \text{ euros} - 15 \cdot 1,2^k$$

La transformée inverse est un peu naïve, il est vrai, mais dans la vie aussi c'est souvent à ces demoiselles qui sont les plus naïves qu'il arrive le plus de choses...

Deux conclusions:

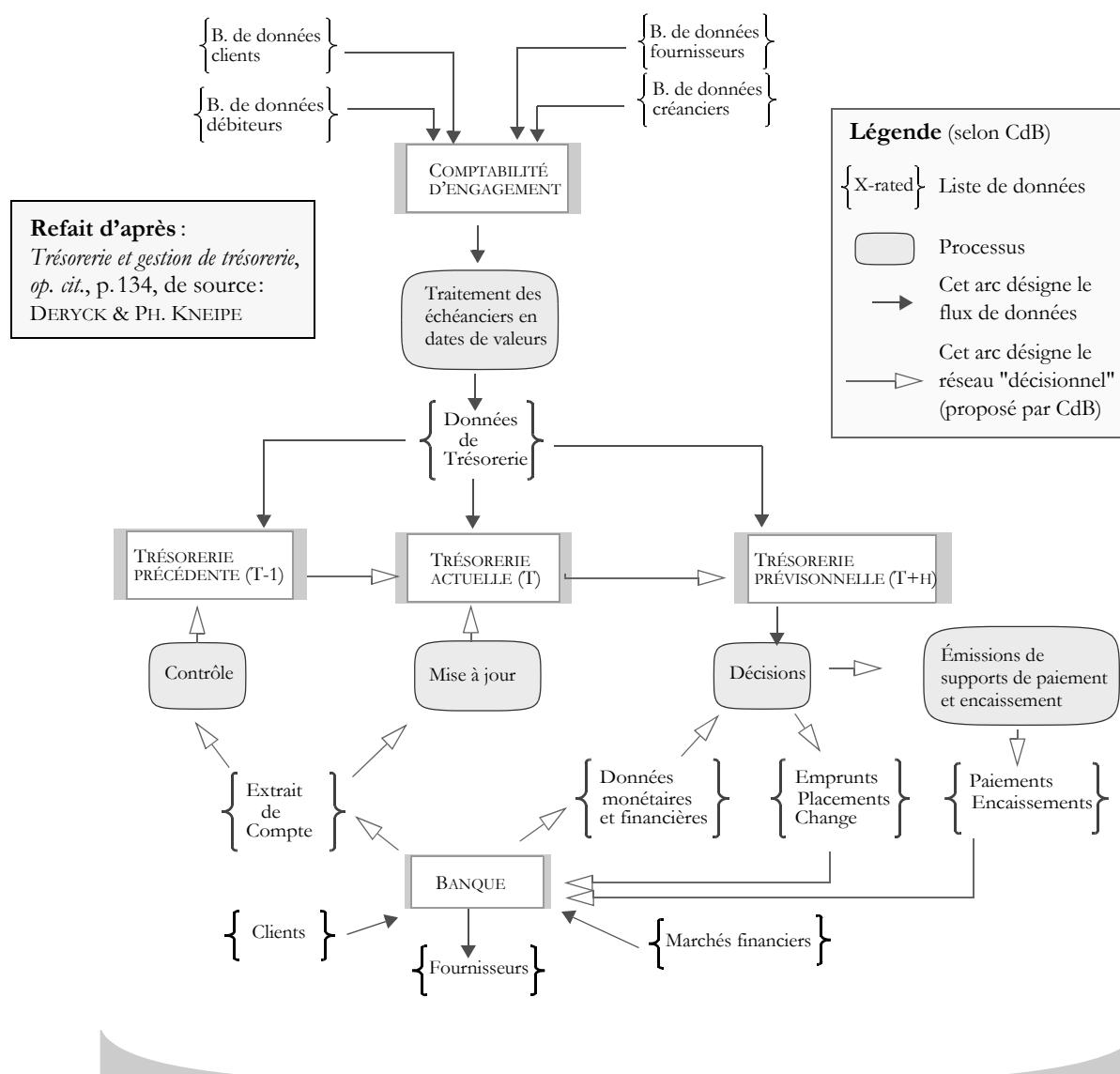
- D'abord, il est ridicule de faire tout cela pour obtenir ce résultat déplorable: la mise de départ est mangée aux mites;
- Ensuite le trésorier, ou même la concierge, pouvait dire tout de suite qu'un coût de 90% du prix de vente ne fait pas vivre son homme. Mais si le modèle a pu donner raison à la concierge, c'est qu'il est valide et utile.

Et toc. Quand on va à une soirée, après tout, peu importe avec laquelle de ces dames on sort. Ce qui est important, c'est avec laquelle on rentre.

#### 4.1.8 Intégration des données dans un logiciel de trésorerie

Il existe des supports "informatisés" pour aider le trésorier. Déjà un tableur moderne, par exemple, avec son déroulement temporel horizontal, permet d'y présenter quasi toutes les grandeurs pertinentes et leur timing, avec l'avantage de la clarté et de la flexibilité. Cette recommandation réaliste aidera au moins à ne pas se tromper à cause de complications inutiles, et à ne pas acheter fort cher des programmes tout faits qu'on ne peut ni adapter, ni changer (car ils sont compilés), ni utiliser parce qu'on n'est pas malin assez.

**Figure 28. Intégration des données dans un logiciel de trésorerie**



Ce schéma de la Figure 28 (de P. DERYCK, «Séminaire d'étude de la trésorerie», *op. cit.*, et Ph. KNEIPE, *Gestion de la trésorerie de l'entreprise*, *op. cit.*, p.34) propose, en hommage à ces auteurs, une architecture intégrée. Toutefois, elle adopte, dans un souci de cohérence, la sémiologie graphique de ces exposés-ci.

Ce schéma a au moins le mérite d'être non seulement claire, mais encore d'un prix abordable puisqu'il est honnêtement piraté. C'est comme le disait SURCOUF le Corsaire: lui-même avouait qu'il se battait pour l'argent, tandis que les Roastbeefs d'en face prétendaient le faire pour l'honneur... mais chacun se bat pour ce qu'il n'a pas.

## 4.2 Application au lissage exponentiel

### 4.2.1 Formulation du modèle d'extrapolation

Comme les modèles aux différences relèvent de la catégorie des filtres linéaires, il en va de même pour les méthodes de projection de séries chronologiques fondés sur les structures autorégressives. Un cas particulier de tels filtres, dont le succès – sinon la performance – est justifié par son élégante simplicité, est la famille dite de "lissage exponentiel". Pour soutenir l'assertion certains modèles pourraient servir à quelque chose, voici une application de la transformée-z aux deux cas le plus élémentaires de lissage exponentiel.

Post-scriptum.

Les cas plus compliqués sont toujours à faire par les élèves, de même que les démonstrations de théorèmes flageolants que les profs n'ont pas trouvées. Ainsi, il est fréquent de lire: "Étant évidentes, elles seront laissées à l'étudiant au titre d'exercice; suggestion pour la démonstration: utiliser la théorie des fractales flous dans un espace elliptique de Lobachevski."

Le "lissage exponentiel" est un filtre linéaire fondé sur un modèle auto-régressif utilisé fréquemment en gestion pour le lissage et la projection de séries chronologiques. Seule sa version la plus élémentaire, très connue, sera mentionnée ici, afin d'illustrer un usage facile de la transformée-z. Quand la version n'est plus élémentaire, elle ne peut d'ailleurs plus être qualifiée d'"utilisée en gestion"; elle peut devenir scientifique, ou être confiée à l'économétrie.

Le modèle de base forme un output  $y_t$  par une variété linéaire de ses propres valeurs antérieures dont les poids sont exponentiellement décroissants en fonction de l'âge des valeurs, soit (1):

$$(1) \quad y_t = \alpha x_t + \alpha(1-\alpha)x_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2x_{t-2} + \dots + (1-\alpha)^t y_0, \text{ soit encore:}$$

$$(1) \quad y_t = \alpha \sum_{k=0}^{t-1} (1-\alpha)^k x_{t-k} + (1-\alpha)^t y_0 = \sum_{k=0}^{t-1} w_k x_{t-k} + w^t y_0$$

Cette expression (1) devrait raviver des souvenirs des Lectrices adeptes de convolutions. Elle ne diverge pas si  $0 < \alpha < 1$ ; les autres valeurs de  $\alpha$  sont évidemment sans intérêt pour la procédure. Par substitutions récurrentes, on obtient la relation de base:

$$(2) \quad y_t = \alpha x_t + (1-\alpha) y_{t-1}$$

Cette relation (2) peut ensuite être exploitée par composition pour former des filtres d'ordre plus élevé, disons 2 et 3. Au-delà, des procédures plus complexes sont appelées pour le traitement des séries.

Le filtre d'ordre 2 se construit par superposition de deux filtres élémentaires, soit:

$$\begin{aligned} y_t^{(1)} &= ax_t + (1-a)y_{t-1}^{(1)} \\ y_t^{(2)} &= ay_t^{(1)} + (1-a)y_{t-1}^{(2)} \\ (3) \quad y_t &= 2y_t^{(1)} - y_t^{(2)} \end{aligned}$$

La projection par ce modèle est linéaire selon (4):

$$(4) \quad \hat{x}_{t, t+h} = y_t + hb_{1, t}$$

Quant au filtre d'ordre 3, pour l'obtenir il faut en superposer... trois! Ceci revient à exécuter trois lissages successifs du premier ordre, soit:

$$\begin{aligned} y_t^{(1)} &= ax_t + (1-a)y_{t-1}^{(1)} \\ y_t^{(2)} &= ay_t^{(1)} + (1-a)y_{t-1}^{(2)} \\ y_t^{(3)} &= ay_t^{(2)} + (1-a)y_{t-1}^{(3)} \end{aligned}$$

La projection par ce modèle est quadratique selon (5):

$$(5) \quad \hat{x}_{t, t+h} = y_t + hb_{1, t} + \frac{1}{2}h^2b_{2, t}$$

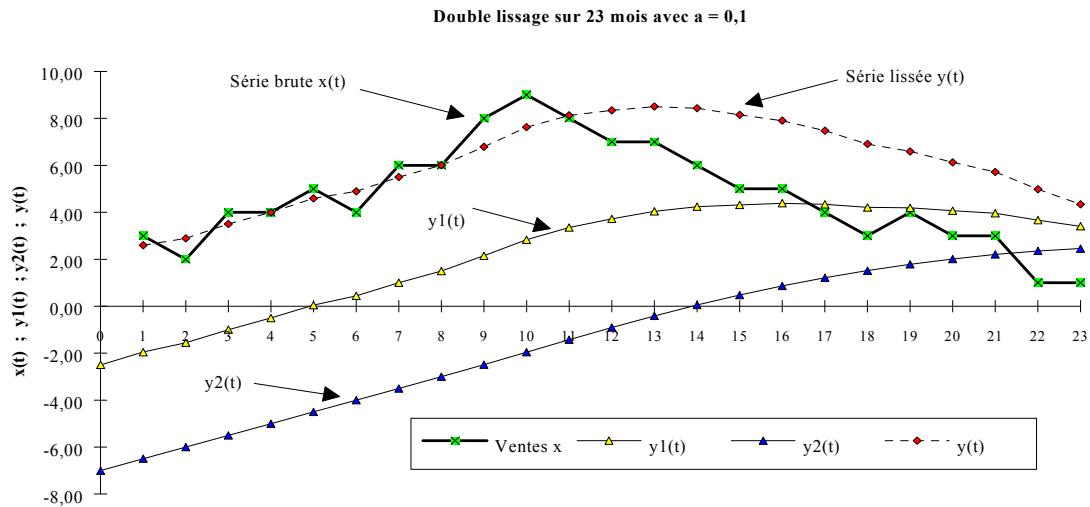
Une fois les conditions initiales obtenues (les valeurs au temps "0"), les coefficients  $b_i$  de l'extrapolation sont obtenus de façon adaptative en fonction des valeurs lissées  $y_t$ :

$$\begin{aligned} (6) \quad \hat{b}_{0, t} &= 3y_t^{(1)} - 3y_t^{(2)} + y_t^{(3)} \\ \hat{b}_{1, t} &= \frac{a}{2(1-a)^2} \cdot [(6-5a)y_t^{(1)} - 2(5-4a)y_t^{(2)} + (4-3a)y_t^{(3)}] \\ \hat{b}_{2, t} &= \frac{a^2}{(1-a)^2} [y_t^{(1)} - 2y_t^{(2)} + y_t^{(3)}] \end{aligned}$$

#### 4.2.2 Les réponses aux fonctions d'impulsion

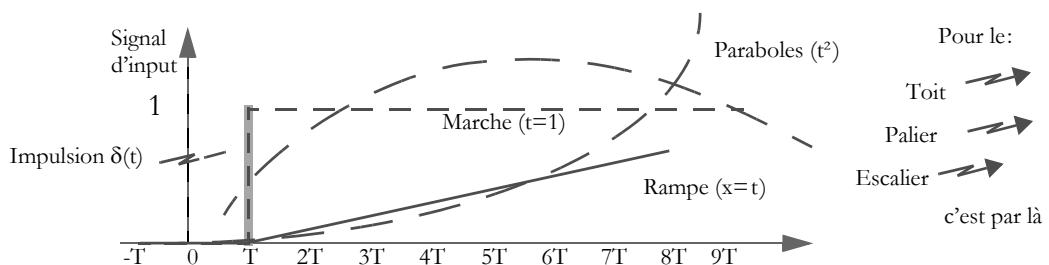
Les clefs du modèle étant données, la question est de connaître la réponse du modèle aux données passées dans le filtre; en pratique c'est parler du comportement de la série  $y(t)$  qui est le passage de  $x_t$  dans le filtre. La Figure 29 en montre un exemple réaliste, celui de 23 mois de ventes d'un distributeur de voitures MERCÉDÈS.

On y constate un phénomène inquiétant: recevant une série dont le signal fondamental est quadratique, le filtre simple et le double ont des comportements peu vertueux: ils accusent un retard et, l'un dans l'autre, comme disaient les petits amis Jacquot et Claudy, ils s'en tirent assez mal. Ceci n'est pas seulement dû à la mauvaise tenue de route des voitures MERCÉDÈS, mais bien aux dérapages des filtres de lissage lorsque ceux-ci ne sont pas appliqués correctement.

**Figure 29. Réponse du lissage double à une fonction quadratique**

Un peu de psychanalyse des systèmes va aider à élucider ces déviations. À cette fin, il faut suivre la tradition de la profession, qui est de soumettre au filtre des inputs élémentaires, et considérer leur réponse; ensuite, il est possible d'effectuer des compositions de ces signaux pour en déduire la réponse à des signaux d'ordre plus élevé. Il s'agit donc d'interaction entre deux processus, dont l'input est "standard", et de montrer le comportement temporel de l'output.

Le grand auteur des méthodes généralisées de lissage exponentiel, R.G. BROWN, y avait déjà pensé quand on était encore jeune (*Smoothing, forecasting and prediction of discrete time series*, Prentice Hall 1963) et le résultat de cette analyse, très connue évidemment, figure p.115 et sq. de cet ouvrage.

**Figure 30. Les fonctions d'input standard**

Le Tableau 4 donne les réponses à une impulsion respectivement des filtres des trois premiers ordres, dits "simple", "double" et "triple". Comme le filtre de premier ordre est la constante  $a$  que multiplie une simple rétromettance, du type  $g(k) = b g(k-1)$ , sa fonction de transfert  $H(z)$  est déjà connue,  $a/(1-bz)$ . Les autres étant le double, puis le triple, même processus mis en série, il suffit de faire les produits des fonctions de transferts par elles-mêmes. C'est ce que résume le Tableau 4, conforme au Tableau 10.1 de BROWN, *op. cit.* p.146, où le paramètre  $b$  est écrit pour  $(1-a)$ .

**Tableau 4. Réponses des filtres linéaires à une impulsion unitaire**

| Ordre du filtre | Fonction de transfert $H(z)$ | Réponse à une impulsion      |
|-----------------|------------------------------|------------------------------|
| Simple          | $\frac{a}{1-bz}$             | $y_t = ab^t$                 |
| Double          | $\frac{a^2}{(1-bz)^2}$       | $a^2(t+1)b^t$                |
| Triple          | $\frac{a^3}{(1-bz)^3}$       | $a^3\frac{(t+1)(t+2)}{2}b^t$ |

Le Tableau 5 donne à présent la réponse du lissage simple aux quatre inputs standard; il réunit les résultats des tableaux 10.3 et 10.4 de BROWN (*op. cit.* Ch. 10). Qu'apprend-t-on de ces formules? Le modèle de base (2) est linéaire et les compositions d'ordre plus élevé, donc (3) et (6), en sont des combinaisons linéaires; cette propriété s'applique donc aussi aux transformées. La colonne centrale donne les réponses de ces filtres aux différentes impulsions, fondées sur les transformées inverses rappelées au Tableau 4.

Ceci donne les comportements transitoires, c'est-à-dire l'évolution temporelle de la série d'output lorsque passe le temps  $t$ . Ces comportements sont à comparer à celui des inputs respectifs présentés à la Figure 30; leur divergence éventuelle par rapport à cette évolution de référence est un critère d'inadéquation du modèle.

Évidemment, un filtre de "lissage" ne doit pas nécessairement "coller" aux observations (ce n'est pas un ajustement), mais ne doit pas avoir une allure méconnaissable par rapport à celle de la source. Ceci se traduit au cours de la vision graphique des séries ( $x$  et  $y$ ), et mathématiquement par les écarts entre la fonction d'input ( $t, t^2$  etc) et la formule de réponse. Lorsque cet écart comprend un facteur  $b^t$ , c'est-à-dire  $(1-a)^t$ , celui-ci tend vers 0 pour  $t \rightarrow \infty$ , puisque  $a < 1$ .

On obtient alors la situation en régime "final" (en anglais "steady state"), où le "reste", figurant dans la troisième colonne, représente le biais, la divergence de comportement.

Tableau 5. Les réponses des filtres aux inputs standard et leurs biais

| Input                    | Réponse transitoire |   | Biais en régime final " $x_\infty - y_\infty$ " |
|--------------------------|---------------------|---|---|
| <b>Lissage d'ordre 1</b> |                     |   |   |
| (a) Impulsion            | $x_t = \delta(t)$   | $y_t = ab^t$  | 0   |
| (b) Marche               | $x_t = 1$           | $y_t = 1 - b^{t+1}$   | 0   |
| (c) Rampe                | $x_t = t$           | $y_t = t - \frac{b}{a}(1 - b^t)$  | $\frac{b}{a}$                                   |
| (d) Parabole             | $x_t = t^2$         | $y_t = t^2 - \frac{2bt}{a} + \frac{b(1+b)}{a^2}(1 - b^t)$   | $\frac{2bt}{a} - \frac{b(1+b)}{a^2}$            |
| <b>Lissage d'ordre 2</b> |                     |   |   |
| (e) Impulsion            | $x_t = \delta(t)$   | $a^2(t+1)b^t$   | 0   |
| (f) Marche               | $x_t = 1$           | $1 - [1 + (t+1)a]b^{t+1}$   | 0   |
| (g) Rampe                | $x_t = t$           | $t - \frac{2b}{a} + \left(\frac{2}{a} + t\right)b^{t+1}$  | $\frac{2b}{a}$                                  |
| (h) Parabole             | $x_t = t^2$         | $t^2 - \frac{2b}{a}\left(t - \frac{1}{a}\right) - \left[t(1+b) + \frac{2}{a}\right]\frac{b^{t+1}}{a}$   | $\frac{4bt}{a} - \frac{2b}{a^2}$                |
| <b>Lissage d'ordre 3</b> |                     |   |   |
| (i) Impulsion            | $x_t = \delta(t)$   | $\frac{a^3(t+1)(t+2)}{2}b^t$  | 0   |
| (j) Marche               | $x_t = 1$           | BROWN écrit p.150 ( <i>op.cit.</i> ):<br>«I am indebted to Mr. G.J. CROOK for carrying through and checking the tedious algebra needed to prepare these tables.»                    | 0   |
| (k) Rampe                | $x_t = t$           |   | $\frac{3b}{a}$                                  |
| (l) Parabole             | $x_t = t^2$         | Pour l'ordre 3, les Lecteurs et Lectrices sont donc invités à s'adresser à ce bon Mr. CROOK pour en obtenir une version personnalisée, dédicacée aux acquéreurs du présent ouvrage. | $\frac{6bt}{a} - \frac{3b}{a}$                  |

Un exemple typique, et facile à interpréter, est celui de la "rampe", figurant sous (g) au Tableau 5. Le deuxième output de lissage,  $y_t^{(2)}$  dans le modèle, peut "suivre" le signal croissant linéairement (la rampe), mais gardera en état final (la troisième colonne) un écart constant de  $2(1-a)/a$  – ce qui est l'"âge moyen" de ses valeurs.

Dès lors, le modèle de lissage double exprimé par  $2y_t^{(2)} - y_t^{(1)}$  sera capable de suivre un tel signal d'input; il ne pourra cependant pas traquer une parabole, ainsi que le montre la ligne (h) du Tableau 5.

Quand au lissage *triple*, qui peut suivre un retournement (un morphion parabolique), il expédie nécessairement la projection selon une quadrique, donc une croissance ou un écroulement rapidement déraisonnable. Il a cependant la vertu de décrire un mouvement parabolique en s'y ajustant – il est d'ailleurs fabriqué pour cela – et cela doit plaire aux "chartistes" de la bourse, où certains l'appellent le "TRIX", ce dont témoigne la référence suivante, pire que naïve: «Un bon truc: Le TRIX». Dans *Cash!* du 11 mars 1999, p.18.

Et voilà. Merci BROWN, c'est très bien; vous pouvez vous retirer, nous allons délibérer.

Il est d'ailleurs l'heure du baiser chinois.

## 5 Les voies des processus

**S**’il sort de son immobilisme, trois centres d’intérêt dominent l’investigateur des mouvements, des changements, de l’"évolution".

Il s’agit de la capacité de:

- Les appréhender, les *exprimer*: c’est la tâche de l’exposé «Les Modèles de processus»;
- *Comprendre* et mesurer les relations entre ces changements, puis les *prédirer*: c’est le présent exposé sur les «Analyses de processus»;
- Influencer, contrôler les changements et *maîtriser* l’évolution: c’est une mission confiée dans un quart d’heure aux «Processus sous consigne».

Mais cette quête de la lucidité et du contrôle n’orienté pas les processus conduisant à la liberté, et surtout à la liberté de la pensée. On n’en veut pour preuve que la variété d’attitudes philosophiques avec lesquelles les processus doivent naviguer:

- «Tout est transitoire», selon les bouddhistes. Ils en sont néanmoins devenus les gens les plus tranquilles du monde. Leurs réponses aux impulsions (comme une piqûre de guêpe en pleine méditation) ne paraît pas faire sursauter leur nirvâna;
- «On ne se baigne jamais dans le même fleuve» selon Héraclite D’ÉPHÈSE;
- La «Fatalité» des musulmans, le «Destin inexorable» et la «Prédestination» des Jansénistes (Dont Blaise PASCAL et Jean RACINE, ce qui n’est pas si peu);
- Le «Déterminisme absolu» de certains positivistes, lequel s’oppose au «Tout est effet du hasard» du bon vieux CARNEADES.

Dans les diverses versions spirituelles qui font des hommes de simples sujets de Dieu, peu de place est laissée, par définition, au libre-arbitre et à la liberté individuelle. Si c’est Lui qui impose toutes les règles, il reste la possibilité d’en parler, pas de les discuter.

À l’opposé, la matérialité organique présente l’ensemble des processus comme un programme héréditaire invariant, inscrit dans les associations génétiques; le processus de la vie «l’ensemble des fonctions qui résistent à la mort» (selon Bichat, *œuvres choisies*, Flammarion 1984). De plus, la pensée elle-même serait engendrée via des phénomènes neuro-naux qui peuvent être exprimés en des termes physico-chimiques, selon des échanges d’énergie et de matière.

Dans ces deux cas, cependant, quelque soit leur degré de déterminisme élucidé par la science, elle-même a progressé en mettant en évidence des indéterminations qui sont émergentes des processus, de par des perturbations et du nombre énorme d’interactions. Les libertés organiques seraient alors issues de la diversité, des "césures" des processus du matérialisme organique, lequel cesse lui aussi d’être inexorable autant que la prédestination. Les libertés de la vie ne seraient alors, comme dans les sociétés humaines, que des déchets du désordre.

Mais soudain, alors qu’on croit dominer ses processus, qu’on les a transformés, autopsiés et placés en soins intensifs, on sera effaré de sentir le temps, dopé depuis sa naissance, nous dépasser sans un regard en arrière.

