LA DYNAMIQUE SOUS INFLUENCE

Le modèle de base est celui d'un processus inerte, indifférent et avachi dans un confort amorphe, gelé dans ses conditions initiales.

Puis, soudain, il reçoit une impulsion.

Sa dynamique se dégèle alors. Les opérateurs s'ébrouent, les foncteurs F, G, H sortent de leur torpeur, les vecteurs envoient les premiers signaux, les capteurs s'éveillent, les intégrateurs se regonflent, les différentielles transmettent l'énergie : l'engin s'ébranle, se met à bouger. Il passe en cahotant à travers des états transitoires, puis il trouve son régime stable et commence à tracer une trajectoire.

Au moment où il arrive à la station k, on le saisit au passage car il devient intéressant à photographier et on fait rapport sur son état x_k.

Cependant, dans ces modèles anciens, cette dynamique ne s'arrête pas, elle ne s'éteint pas en faveur d'une autre, sauf impulsion opposée qui bloque son élan.

C'est ce qui est arrivé maintes fois dans l'histoire. Ainsi en fut-il de la susdite Jehanne d'Arc qui n'arrêtait pas de harceler les gens d'armes à bouffer les Roastbeefs, Britishs avec lesquels la France n'avait pourtant pas d'ennuis, vu leur discrétion et leur hautement décente éducation. Pour la faire taire, il a fallu d'abord enfermer cette énervante Pucelle (à Bourges en 1429), puis finalement carrément la ficeler et la cramer pour qu'elle cesse d'exciter les hommes et leur faire entendre ses voix.

Ainsi les processus dynamiques sont très influençables, mais leurs modèles symboliques ne décrivent qu'un éther, abstrait et imaginaire, huilant le vide entre les corps sur lesquels se frotte la gestion.

LA DYNAMIQUE SOUS INFLUENCE

Sommaire

1 L'ouverture de la dynamique

1.1 L'interstice temporel

La dynamique est un milieu très fermé, gardé par de sévères *foncteurs*, fonctionnaires hautains assurés de leur emploi et dont l'usage est réservé à des *opérateurs* très qualifiés. Ce club austère a subi la même mésaventure que le Pyllsbury's dans le West End de Londres: ayant trouvé l'huis par inadvertance entrouvert, une Lady y glissa d'abord un œil curieux, puis un pied furtif, et ensuite, poussant en avant ses avantages, elle y pénétra, et mit de la sorte fin à l'Ancien Régime de l'Empire britannique. But she was a good sport.

Ainsi en est-il de l'ouverture des processus dynamiques aux corps étrangers. Les toutes premières impulsions qui y ont pénétré sont peu de chose: un petit machin fabriqué dans son grenier par le physicien DIRAC, qui ne vaut que δ=1 et se situe dans un très petit espace temporel, un interstice situé en t=t°, et ne vaut rien du tout ailleurs, et dont même la variance est nulle.

Mais ensuite ce sont des vecteurs entiers qui se sont bousculés pour y entrer, et il a fallu laisser les systèmes ouverts. Ils y ont perdu leur autonomie, et leurs comportements ont été conduits à la débauche sous de mauvaises influences. Le contrôle, exposé plus tard, tentera d'y apporter quelque régulation.

1.2 Par la voie externe

La physique a vis-à-vis de la dynamique un point de vue *interne*, a savoir que le modèle proposé doit constituer une bonne description du comportement de l'objet et, de plus, on attend de ce modèle une explication de ce comportement dans le temps par appel à quelques principes parcimonieux ayant suffisamment de généralité.

Ayant placé méticuleusement de tels modèles dans ses neurones, on peut alors lever les yeux au ciel et rêver aux célestes problématiques auxquelles s'adresse la mécanique hamiltonienne et ses processus autonomes, écoutant le somptueux opéra de Niels Bohr, le cantique des Quantiques. Puis, baissant les yeux comme devant la Mère Supérieure, on voit qu'ici-bas on n'utilise que des objets qui pourraient être dynamiques, comme des voiliers et des vélos, mais qu'il serait dommage de laisser inertes, ce qu'ils sont si on n'exerce pas à leur égard quelque force extérieure.

Le monde réel impose aux processus physiques qui nous entourent des impulsions et des perturbations (des *inputs*) issues des environnements dont l'influence est souvent *imprévisible*, en ce sens que la variété de ces impulsions ne peut être incluse a priori dans la formulation qui décrit le processus du système vu par le mathématicien. En effet, lorsque ce comportement du processus sera influencé par des inputs, en des temps au-delà de maintenant, une prédiction ainsi fondée ne sera plus déterminée si ces futurs inputs sont inconnus.

Dès lors, deux voies sont dessinées:

- La première voie est de considérer que pour le "modèle de" qui est établi, le monde extérieur reste tranquille, n'exerce pas d'influences originales, et cette voie est celle dont on a parlé dans l'exposé sur la dynamique libre;
- La deuxième voie est de définir formellement certains types d'interférences et d'impulsions et de prédire leurs effets sur un ensemble en interaction: on entre alors en théorie des systèmes sous influence.

La théorie des systèmes se départit donc de la physique classique par la dominance de cette deuxième voie, dite de point de vue *externe*, où le centre d'intérêt est *ce que l'on peut faire du système* et donc les réactions de celui-ci lors de stimulations externes. Ce point de vue autorise la prédiction de comportement via un "modèle de", sans que ce dernier doive être explicatif. On peut alors mettre dans une boîte noire le processus ou une loi qui transforme un input extérieur en un output livré par ce processus et pouvant à son tour avoir un effet sur un environnement. C'est aussi ce qui justifie l'expression "en milieu ouvert", qui implique l'ouverture aux influences, aux échanges.

Qu'elle soit expliquée ou seulement modélisée, cette dynamique de la physique et celle de la théorie des systèmes ont un point commun, à savoir la notion d'*état*, puis sa formulation et son exploitation opérationnelle. Une description de l'état présent et de sa fonction **F** de transformation devrait suffire pour déterminer le comportement futur du processus. Ceci convient pour les descriptions de la physique par lesquelles un processus est *autonome* et des trajectoires (même difficiles, complexes) peuvent être établies à partir de conditions initiales explicites.

Voici un assortiment choisi de *variables d'état* en physique:

- En mécanique classique, le *moment* et la *configuration*;
- En mécanique quantique, la fonction d'*onde*;
- En théorie électromagnétique, les *champs* électrique et électromagnétique.

La notion d'état a été généralisée aux processus input-output en construisant des "variables d'état" qui contiennent assez d'information relative au passé pour que le foncteur qui engendre l'output futur puisse le faire sur la base seulement de l'état actuel sans nécessairement en appeler à l'ensemble des inputs antérieurs. Ceci amène une simplification mathématique qui se manifeste de deux façons:

- La *formulation* est plus sobre et élégante, notamment par les expressions en termes d'opérateurs;
- La *résolution* est simplifiée (mais sous des hypothèses restrictives), et même possible, en raison de la transformation du problème initial analytique en un problème algébrique pour lequel on pourra faire appel à des solutions vulgaires, pour autant qu'on veuille bien se vautrer un peu dans la débauche de l'algèbre des opérateurs.

L'apport essentiel est précisément la concaténation des transformations d'état antérieures situées donc dans les fenêtres temporelles précédentes dans un seul être mathématique, en l'occurrence ce *vecteur d'état*. Il s'ensuit que la formulation de la solution deviendra analogue à celle d'un système d'équations aux différences ou différentielles de premier ordre (du type $\partial x = \boldsymbol{f}(x,u)$) qui en donnera dès lors l'archétype de la formulation.

On est cependant collé à ces sempiternelles équations différentielles et aux différences, qui représentent si mal la dynamique hors du contexte de la mathématique et des modèles de systèmes physiques formels. Mais il y en a si peu d'autres ! De plus, il faut se méfier de ses impulsions : les moindres incartades non-linéaires ou stimuli indécents engendrent des formulations et comportements inextricables.

Que dire alors lorsqu'en gestion il faudra parler, plus vaguement, d'*influences* au lieu de fonctions d'inputs mathématiquement formulées ? Dans ce cas, la prédiction de comportement deviendra *conjecture* et sera plus dépendante du *sujet* qui l'exprime (c'est-à-dire deviendra plus *subjective*), et cela au point de ne plus pouvoir faire appel à cette modélisation, même par analogie, et n'en garder pour la fine bouche que l'apport fait à la remarquable intelligence du Lecteur.

2 Un output influençable

2.1 Le caractère auto-régressif

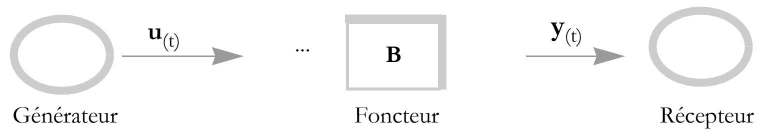
Le processus temporel qui rapproche du pratique et utile en systémique est celui par lequel un flux d'entités est soumis à un objet (un *foncteur*) capable de le transformer, de le convertir et de livrer le résultat de la conversion. Dans un tel contexte, une convention est d'appeler *intrant* le flux soumis et *extrant* le flux sortant.

- Du point de vue du *design*, plusieurs de ces objets effectuant des conversions peuvent être couplés (en inclusion, série, parallèle, ou en feed-back) et l'élaboration ou la description de cet assemblage est un problème de *configuration*, de *design* par *synthèse ;*
- Du point de vue de l'*exploitation*, le centre d'intérêt se porte sur la nature et les performances de cette conversion, et notamment sur la capacité de la conversion de fournir un extrant qui ait des propriétés désirées (ce qui rapproche du processus sous contrôle) ;
- Du point de vue du foncteur lui-même, on s'intéresse surtout aux *propriétés* de la conversion, par exemple au temps passé à la réaliser ou à l'économie de ressources utilisées ;
- Dans le cas de processus *symboliques*, le nom générique de ce qui est soumis à un foncteur est conventionnellement l'*input*.

  Lorsque la configuration ne traite que de l'information, l'input est de la nature d'un *signal* (souvent désigné par **u**) et l'information sur la réponse est la valeur du *signal* d'*output*, désigné par **y**, lequel a été affecté par le signal **u**. L'entrée dans la dynamique se fait lorsque **u** est un signal temporel, écrit **u**(t).

Dès lors, la réponse **y** est un signal temporel **y**(t). Le processus n'est plus autonome, la réponse étant sous influence de signaux qui lui sont soumis. De même, le foncteur n'est plus celui de la variation autonome, mais celui par lequel le signal d'input **u** engendre l'output **y**, qui sera désigné par **B**. La Figure **1** met ces petits objets en place. Les généralisations se construisent depuis ce cas le plus élémentaire.

Figure 1. Input, foncteur et output



2.2 Le caractère discret

Pour faire honneur à la gestion, les écritures qui vont suivre vont adopter le temps des comptables, à savoir que les valeurs ne seront pas décrites par des fonctions temporelles continues mais seront échantillonnées par intervalles de temps constants. Dans ce contexte, une variable "z" écrite z_{t+k} est décalée de k intervalles de temps par rapport à z_t; l'indice, décalé dans le sens positif, subit donc une excrémentation. Conformément à ces conventions, le cas le plus facile est celui où B est un simple opérateur de gain, un scalaire, disons b_0. Alors:

(1) $y_t = b_0\, u_t$

Si, tout bêtement, $b_0 = 2$, la réponse instantanée de y est deux fois l'input u, ce qui n'est déjà pas si mal, mais c'est un hoquet et pas un processus.

Soit à présent que l'évolution temporelle de y soit fonction de sa valeur antérieure et du signal d'input u_t. Dans ce cas, un second foncteur, $f(y_{t-1})$ entre en jeu. Si f(.) ne désigne ici encore qu'un simple facteur de gain, ce dernier s'écrit comme un coefficient scalaire, disons a_1, et la formulation est:

(2) $y_t = a_1 y_{t-1} + b_0 u_t$

Dans (2), l'output "y" a un comportement formé par une partie *libre* (la variation propre de y) et une partie *influencée* (par u). Cette expression (2) a une composante multiplicative et une autre additive, mais elle n'est toutefois qu'une petite équation aux différences premières (puisque seul "t-1" apparaît explicitement). Plus généralement, y peut être engendré par l'ensemble additif de ses n valeurs antérieures et être percuté par $b_0 u_t$, ce qui s'écrit:

(3) $y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + ... + a_n y_{t-n} + b_0 u_t$

Depuis (2), mais de façon plus spectaculaire dans (3), la dynamique de y est décrite par un modèle dit *auto-régressif*, complété par u, on ne peut pas le cacher. On a en (3) une équation aux différences du n^e ordre, ce qui est joli mais commence à donner des inquiétudes au type chargé de la résoudre au lieu de l'écrire. De plus, si la présentation est en continu (c'est la différentielle ∂y qui est ici échantillonnée par "y_t-y_{t-1}"), cela conduit à des équations différentielles à faire peur aux candidats en science de gestion.

3 Expression du processus en variables d'état

3.1 Un nouvel agent de l'état

3.1.1 Intégrateur et potentiel

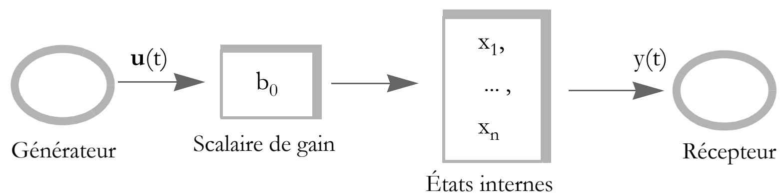
Les variables d'*input* $\mathbf{u}_t$ sont une représentation symbolique de forces externes qui influencent la dynamique ou les mouvements de l'objet. Rappelons qu'il s'agit ici de systèmes en tant qu'abstraction mathématique, et dès lors les variables représentent des *valeurs*, lesquelles peuvent avoir une correspondance avec les *propriétés* d'un objet:

- Les variables d'*output*, écrites $\mathbf{y}_t$, sont des variables qui sont directement observables par un observateur extérieur;
- Les variables d'*état*, désignées ici par **x**, caractérisent la dynamique interne du système et, comme on l'a dit, lorsqu'elles sont connues de même que l'input, déterminent l'avenir des **x** et des **y**.

Le drame affreux est que les variables dites d'état ne sont qu'une transformation, un artifice faisant la concaténation dans un seul être mathématique des transformations antérieures situées donc dans les fenêtres temporelles précédentes. C'est ce qui permet d'écrire (puis de résoudre) un système différentiel ou aux différences d'ordre "n" (tel que (3) puis sa généralisation matricielle) en tant que système d'ordre 1, ce qui est autant de gagné. Mais ce peut être une fausse aisance, car le prix fort à payer en effet est la définition et l'interprétation de telles variables.

La Figure **2** se compare à la Figure **1** en montrant que le foncteur devient maintenant un processus de transformation des variables d'état, et non plus une fonction de distribution des décalages dans le temps. Elle montre aussi que les **u** et le y sont externes, les **x** étant des états internes.

Figure 2. Input, gain, états et output



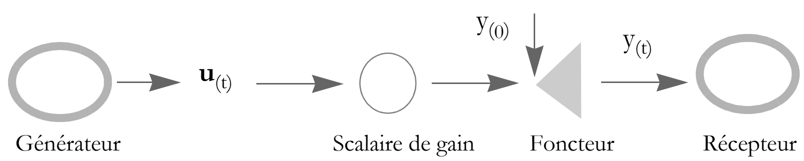
La représentation en variables d'état pour un système donné n'est pas unique, mais la propriété suivante est commune aux différentes versions possibles: "Le nombre d'éléments du vecteur d'état **x** est identique et minimal, et désigne l'ordre du système." L'ordre d'un tel processus temporel est le nombre de transformations différentielles antérieures qui amènent à l'output y actuel, y(t).

Ainsi, celui de l'équation canonique (3) est d'ordre "n", vu que le plus "ancien" indice qui intervient est vieux de n périodes, ou encore qu'il faut n translations différentielles d/dt pour arriver à y(t). C'est ce qui donne à l'opérateur différentiel le degré n. Le truc pour spécifier les variables d'état est le suivant: définir une variable, disons x_i, pour désigner le résultat de la transformation précédente; pour l'ordre n, il y aura donc n états internes, x_1 à x_n, qui se retrouvent sur la Figure **2**.

Lorsque la transformation est différentielle, son résultat est une intégration, donc un accumulateur de potentiel nourri par les inputs u(t) à partir d'un potentiel initial, disons $y(t_0)$. Ceci est exprimé par la relation (4) et la Figure **3**:

(4) $$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

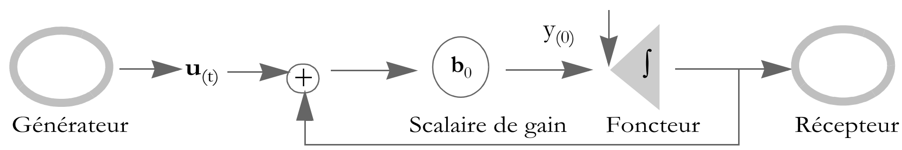
Figure 3. Input, intégrateur et output



Lorsque le foncteur est différentiel et le facteur de gain constant, disons b_0, la représentation est celle d'un foncteur de dynamique, la Figure **4**. L'opérateur ∂ a l'interprétation d'une avance temporelle, tandis que l'*intégrateur* $(1/\partial)$ fait l'accumulation du potentiel:

(5) $$\partial y(t) = b_0 y(t) + b_0 \boldsymbol{u}(t)$$

Figure 4. Processus dynamique avec foncteur "Intégration"



3.1.2 Une analogie "forcée" pour la cause

Puisqu'on parle de "volume" monétaire (un espace d'ordre trois?), il peut être mis dans une boîte. Ce volume s'obtient par le produit d'une base B par une hauteur Y. La boîte (pleine de monnaie) forme un potentiel, ou capacité, K. Disons que la base B représenterait le pouvoir d'achat relatif à un panier de biens, donc l'assortiment de biens et services accessible pour une quantité donnée d'unités monétaires (des *zoros).*

Ainsi, cette surface diminue avec l'offre par *zoro*, ce qui est une manifestation de l'inflation. Le volume croît avec la hauteur Y, lequel représente un potentiel, le "trésor", qui est de la nature d'une capacité.

À présent, soit un influx continu $f_{in}(t)$ d'unités monétaires (des recettes, ou des rentrées), et $f_{out}(t)$ le flux monétaire sortant (les impôts). Ceci est évidemment *analogue* au cas du réservoir de surface B, de hauteur Y, alimenté et vidé respectivement par des flux $f_{in}(t)$ et $f_{out}(t)$. Dans cette analogie, la perte de pouvoir d'achat unitaire diminue relativement le volume monétaire réel et la fiscalité a un effet différent, linéaire ou non, selon que l'on impose le revenu (f, l'input), le volume nominal ou le pouvoir d'achat de ce volume.

Le flux sortant n'est pas l'output, inintéressant, bien que ce soit ce qui "sort" de l'objet (le volume, le réservoir). Le propos est en effet ici de connaître et prédire à tout instant la hauteur Y de la cassette au trésor. Le taux auquel cet Y(t) change dépend de $[f_{in}(t) - f_{out}(t)]$ et de la surface B. De la sorte:

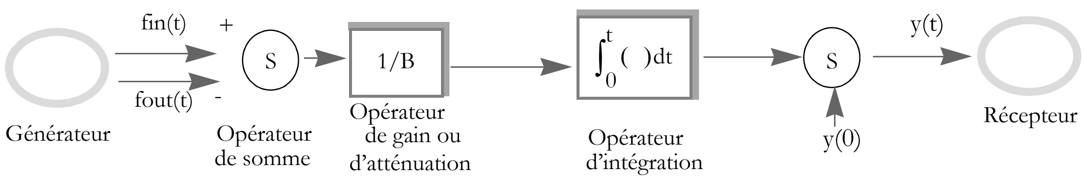
(6) $\partial Y = \left(\frac{1}{B}\right)(f_{in} - f_{out})$ de conditions initiales: $Y(t{=}0) = Y_0$

Cette équation très classique exprime la relation entre la variable et son taux de variation. La solution pour Y(t) a déjà été trouvée par d'autres savants:

(7) $Y(t) = \int_0^t \frac{1}{B}(f_{in} - f_{out})dt + Y_0$

La Figure **5** montre la configuration par "blocs" de cette équation. L'opérateur de sommation algébrique demande de spécifier le *signe* de l'intrant, tandis que l'opérateur de produit par une constante est qualifié d'opérateur de *gain* ou d'*atténuation* selon que cette constante est supérieure ou inférieure à 1.

Figure 5. Inputs, opérateurs et output de l'accumulateur



3.2 La forme continue canonique

À présent, on peut représenter en (8) le processus auto-régressif différentiel général; pour faire des économies de Lectrices (on n'en a déjà pas trop) il sera écrit pour n=3.

(8) $\partial^3 y + a_1\partial^2 y + a_2\partial y + a_3 y = b_0\partial^3 u + b_1\partial^2 u + b_2\partial u + b_3 u$

On fait ce qu'on veut des opérateurs, notamment les transformer selon (9):

(9) $\partial^3(y - b_0u) + \partial^2(a_1y - b_1u) + \partial(a_2y - b_2u) + a_3y - b_3u = 0$

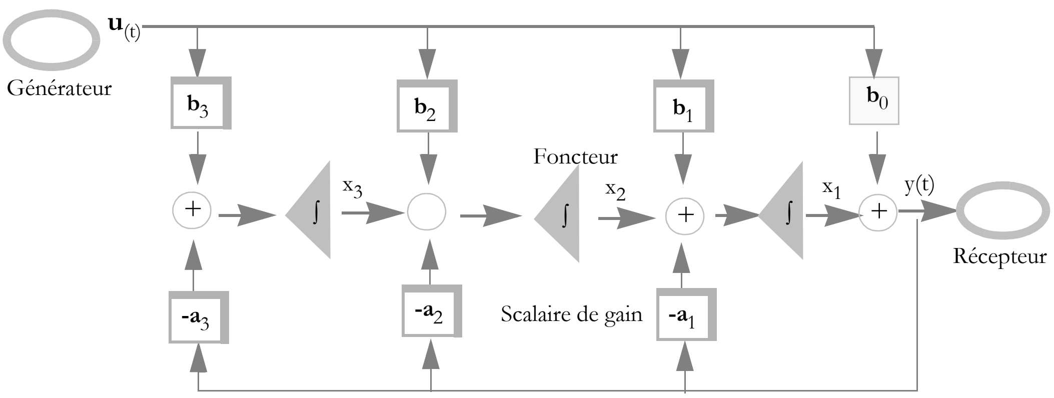
L'ouput "y" devrait apparaître en résultat des intégrations précédentes, alimentées par u. Il suffit de déplacer les opérateurs jusqu'à y en divisant les deux membres de (9) par ∂^3:

(10) $y = b_0u + 1/\partial\,(b_1u - a_1y) + 1/\partial^2\,(b_2u - a_2y) + 1/\partial^3(b_3u - a_3y)$

L'expression (10) est dessinée sur la Figure **6** pour n=3, en utilisant des conventions graphiques spécifiques à ce domaine.

Une telle représentation de processus se lit de droite à gauche comme les graphes de flux, en se demandant: "Comment cet "y" a-t-il fait pour en arriver là? Puis on lit la composition de y via ses inputs et ses transformations d'état. En réalité, ne sont visibles que les variables *externes. O*n peut en effet s'enquérir de u, et observer y et le décrire en fonction du dernier état disponible (x_1), mais les états internes x_i sont, eux, inaccessibles.

Figure 6. Réseau dynamique d'intégrations



Ceci donnera l'*équation d'observation* (11):

(11) $y = x_1 + b_0u$

Les états conduisant à $x_1, x_2, \ldots$, sont (jusqu'à n=3 pour alléger):

$$\partial x_1 = -a_1y + x_2 + b_1u$$

(12) $$\partial x_2 = -a_2y + x_3 + b_2u$$

$$\partial x_3 = -a_3y + b_3u$$

Le processus {(11), (12)} peut s'écrire alors selon la forme canonique matricielle. À cette fin, il suffit d'éliminer y des équations (12) en se servant directement de (11).

Ce remplacement fait, la forme canonique est immédiate, en indices simplifiés 1, 2,..., n:

(13) $$\partial \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_n - a_n b_0 \end{bmatrix} \cdot u$$

Tandis que l'équation d'observation est dans ce cas simplement:

(14) $$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

On peut traverser les matrices à pieds secs pour écrire le système (15)-(16), et en écrivant "d" pour l'ancien petit scalaire b_0, parce qu'il n'y a qu'un seul input:

(15) $\partial \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$

(16) $y_t = \mathbf{c'}\,\mathbf{x} + du$

Dans cette formulation, y_t est une *variété linéaire* formée de ses propres valeurs antérieures et d'un input original u dans laquelle:

- L'équation (15) est dite de *transition d'état*, engendrant sa dynamique autonome;
- L'équation (16) relie l'output y à l'état **x** par une relation dite *équation d'observation*.

Cette paire d'équations est la représentation de (1) dans l'*espace des états*, où on a assisté à la naissance d'un *opérateur*, qui a été ~~baptisé~~ déclaré à l'état civil sous le nom de "**A**". Celui-ci va grandir peu à peu, aura des responsabilités plus étendues et, dans le domaine promotionnel de la gestion, deviendra même... général!

3.3 La forme continue en variables de phase

La forme en *variables de phase* s'obtient en "inversant" opérationnellement et temporellement le graphe du processus, c'est-à-dire celui de la Figure **6**. Dans ce cas, les équations de transition d'état sont ajustées et écrites selon la présentation auto-régressive (17).

(17) $$\begin{aligned} &\partial x_1 = x_2 \\ &\partial x_2 = x_3 \\ &\dots \\ &\partial x_n = - a_1 x_n \dots - a_n x_1 + u \\ &y \quad = - b_1 x_n \dots - b_n x_1 + b_0 \,(u - a_1 x_n \dots - a_n x_1) \end{aligned}$$

Ceci donnera une forme matricielle qui se voit à l'œil nu sur (18)-(19).

(18) $$\partial \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

(19) $$y = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 & b_2 - a_2 b_0 & b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

3.4 Restons discrets

3.4.1 Les correspondances

Soit une affection affectueuse, un état pathologique continu. Mais si cette pathologie un peu kronique était le hoquet? Ce cas est-il une manifestation discrète d'une affection continue, ou bien considère-t-on que le phénomène de hoquets répétitifs est un truc continu, mais *échantillonné*?

De même, un processus continu de valeurs peut être *échantillonné* au moyen d'un rupteur, qui en capte la valeur à des instants successifs. Il peut alors conserver des niveaux de valeurs discrètes pendant des intervalles de temps, ce qui rend le signal résultant continu par morceaux constants. Cette relation est exposée dans la section **8** dans l'optique des... signaux; pour l'heure, on ne pourra en voir que le correspondant discret de la formulation en variables d'état, donc le client est l'expression auto-régressive (17), sous impulsion ponctuelle r_t, reportant plus loin le cas d'impulsions antérieures à "t".

Les correspondances avec la version continue se font en constatant les équivalences suivantes. Soit "t" le temps initial et $y_{(t)}$ la condition initiale. "Tout-à-l'heure" c'est t+1, et l'Angélus de dimanche midi c'est t+k+1. De la sorte, la relation temporelle:

(20) $y_{(t+k+1)} = b\, y_{(t+k)} + br_{(t+k)}$

(20) est équivalente à la relation générique continue, où l'opérateur ∂ joue le rôle de la translation temporelle d'une unité, et u la fonction d'input continue:

(21) $\partial y = by + bu$

Comme l'a présenté l'exposé sur l'«Analyse de processus», les transformées de Fourier passe dans l'espace des fréquences, donnant les expressions canoniques suivantes (utilisant les majuscules pour les transformées) pour (20) et (21). Elles deviennent respectivement (22) discrète et (23) continue:

(22) $z\mathbf{Y}(z) - z\, y(t_0) = b\, \mathbf{Y}(z) + b\mathbf{R}(z)$

(23) $s\mathbf{Y}(s) - y(t_0) = b\, \mathbf{Y}(s) + b\mathbf{U}(s)$

La confraternité est émouvante. Mais quel triste sort est réservé aux opérateurs?

3.4.2 Des opérateurs se chargent de tout

L'idée du gestionnaire de processus (discret) est de saisir (3) et de l'écrire (24). C'est moins lisible que (3), mais on y voit que b_0r_t est une nouveauté à ajouter à la combinaison des valeurs antérieures pour former la valeur la plus récente y_t.

(24) $y_t - a_1y_{t-1} - a_2y_{t-2} -... - a_ny_{t-n} = b_0r_t$

Ensuite, il délègue le pouvoir à des *opérateurs*. À cette fin on nomme d'abord un opérateur de *décalage* **L** (venant de l'Anglais "Lag", décalage précisément) tel que :

$\mathbf{L}y_t = y_{t-1}$ et: $\mathbf{L}^{-1}y_t = y_{t+1}$

L'*ordre* du décalage est l'exposant de l'opérateur **L** et le modèle est polynômial en cet opérateur **L**, selon (25) :

(25) $\Phi(\mathbf{L})\ y_t = r_t$

où l'opérateur **L** devient l'argument de la fonction $\Phi(.)$:

(26) $\Phi(\mathbf{L}) = 1+a_1\mathbf{L}+a_2\mathbf{L}^2+... +a_n\mathbf{L}^n$

Cette forme (26) est généralisée par les modèles auto-régressifs sous influence. L'input global sur y devient une séquence pondérée des inputs r_t successivement décalés, de sorte que les caractériels auto-régressifs écriront (26) plus généralement comme (27) :

(27) $y_t - a_1y_{t-1} - a_2y_{t-2} -... - a_ny_{t-n} = b_0r_{t} + b_1r_{t-1} + b_2r_{t-2} +...+ b_{n-1}r_{t-n+1}$

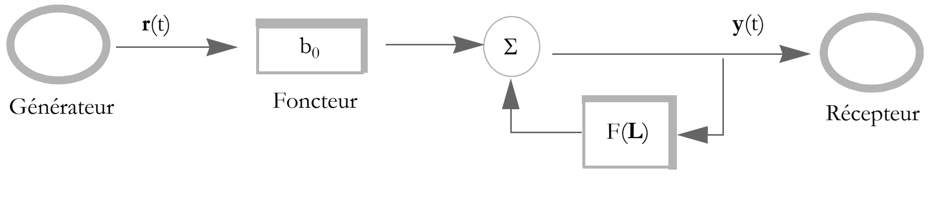
Un deuxième opérateur du même type, Ψ, est engagé, de sorte que la synthèse est (28) :

(28) $\Phi(\mathbf{L})\ \mathbf{y}_t = \Psi(\mathbf{L})\ \mathbf{r}_t$

En effet, ce n'est pas seulement la dernière impulsion qui projette le comportement, mais les stimuli antérieurs (ici les r_{t-k}, pondérés par des coefficients b_k) laissent également des traces, des pulsations déplacées de l'enfance, c'est-à-dire des r_{t-k} telles qu'en avait encore Sigmund FREUD à t=70 ans.

La Figure **7** aide à montrer cette transformation du problème auto-régressif simple.

Figure 7. Input, fonction de distribution de l'opérateur L et output



3.4.3 L'âge canonique

Ce modèle auto-régressif discret peut lui aussi être conduit à une forme canonique en variable d'état **x** par les transformations dites "des phases", écrites ci-dessous avec la légèreté des scalaires. La colonne de droite montre les mêmes définitions, mais décalées d'un pas temporel vers l'avant, et l'élimination de y_t en fonction de x_t arrange tout le monde comme dans le cas continu.

$$
\begin{array}{ll}
x_{1(t)} = y_{(t-n+1)} & x_{1(t+1)} = x_{2(t)} \\
x_{2(t)} = y_{(t-n+2)} & x_{2(t+1)} = x_{3(t)} \\
x_{n-1(t)} = y_{(t-1)} & \\
x_{n(t)} = y_{(t)} - u_{(t)} & x_{n(t+1)} = y_{(t+1)} - u_{(t+1)} \\
\quad = -a_1 y_{(t)} -\dots - a_n y_{(t-n+1)} & \\
\quad = -a_1 x_{1(t)} +\dots -a_n x_{n(t)} + u_{(t)} &
\end{array}
$$

Le correspondant de la forme canonique en *phases* est appelé "nested" programming. La version matricielle (dite "direct programming") est (29)-(30), où les indices montrés sont sont 1, 2, n pour simplifier la lecture :

$$
\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_n \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot r(k) \tag{29}
$$

$$
y(k) = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 r(k) \tag{30}
$$

L'écriture conventionnelle d'un tel système est (31)-(32), lorsqu'il est bien admis que :

- Le modèle est linéaire ;
- Les coefficients sont constants ;
- L'impulsion (r_k) est un vecteur en k.
- L'extension à plusieurs inputs et outputs se fait en empilant les vecteurs respectifs et adaptant les dimensions matricielles des opérateurs en conséquence de cette extension de l'espace de référence ; donc (donc **d** est un vecteur, **B** devient une matrice). Ceci autorise une même écriture synthétique pour un processus temporel plus général, qui est écrit en discret en (31)-(32) :

(31) $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\,\mathbf{r}_k$

(32) $\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\,\mathbf{x}_k + \mathbf{d}\,\mathbf{r}_k$

Et voilà que **x** se dépose sur une *trajectoire* par un opérateur **A**, qui, sous ce régime linéaire qui rend le modèle très mince, n'est qu'une matrice de transition.

3.4.4 Exemple numérique

$$y_t = -2\,y_{t-1} + 0{,}5\,y_{t-2} - 0{,}2\,y_{t-3} + 0{,}5\,r_{t-1} - 0{,}4 r_{t-2} + 0{,}7\,r_{t-3}$$

Les vecteurs sont: $a_1 = 2$ $b_0 = 0{,}5$
$a_2 = -0{,}5$ $b_1 = -0{,}4$
$a_3 = 0{,}2$ $b_2 = 0{,}7$

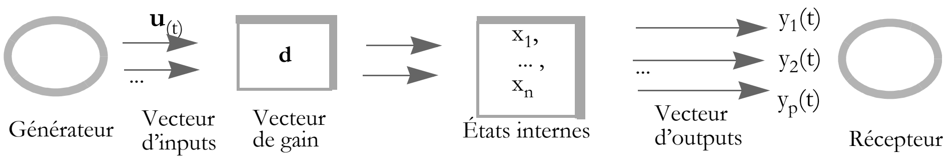
La formulation (31)-(32) devient numériquement, comme dans les textbooks,

(33) $$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -0{,}5 & -0{,}2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot r(k)$$

(34) $$y(k) = \begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}4 & 0{,}7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + 0{,}5 r(k)$$

La Figure **8** représente le système (31)-(32).

Figure 8. Inputs, états internes et outputs



4 Relation entre la séquence d'inputs-outputs et la causalité

4.1 Le point de vue de la source

En systémique et ailleurs, la causalité est l'objet de lourds débats, et on se contentera ici d'une acception *restrictive* dominée par la recherche de relations dites "de cause à effet".

Une idée déjà exprimée par W. CHURCHMAN (dans *The Design of enquiring Systems*, Wiley, 1971) peut se traduire par «**u** est la cause de **y** si **u** est nécessaire et suffisant pour **y**». On y lit donc bien que: "**y** ne peut se produire que si **u**, et si **u** alors toujours **y**".

Moins exigeant est d'accepter que "**u** est cause de **y** si **u** est suffisant pour **y**" et on dira alors que **u** *produit* **y**; **u** n'est alors pas "nécessaire" et il peut y avoir d'autres raisons pour lesquelles **y** se produit. Ainsi le niveau d'un étang augmente si un flux d'eau lui est fourni en ouvrant la vanne d'une canalisation qui y conduit (et qu'il n'y a pas de perte équivalente) mais cette variation de niveau peut aussi avoir lieu lorsqu'il pleut sur l'étang.

La langue française est donc ambiguë lorsqu'elle utilise l'expression "parce que" ou encore "à cause de" en ne disant pas si cette cause est unique, ni si elle est la seule façon d'obtenir cet **y** constaté.

Dans le domaine de la systémique formelle, on imposera à **u** d'être en tout cas *antérieur* à **y**, mais on ne dit pas de combien de temps!

Dans d'autres contextes, cependant, la relation temporelle est plus élaborée. Ainsi on peut produire **y** (d'abord) parce qu'on veut **z** (ultérieurement), c'est-à-dire que l'on se situe dans une logique *téléologique* (teleos est le but) où **y** est instrumental pour **z**. Dans ce cas la dynamique est "*prépostérieure*". On ne saurait dire alors que **z** est "cause de" **y** au sens de la dynamique formelle, mais sans doute qu'il y a pour produire **y** une *motivation* qui est la perspective de **z**. C'est ce qui oriente vers le *finalisme*, et donc la finalité, dont le principe s'oppose à la *causalité*, sur laquelle, selon une superstition populaire, serait fondée la science rationnelle.

Le finalisme est une *position intellectuelle* consistant à postuler que l'univers serait soumis à un principe d'évolution prédéterminé par un but donné a priori, mais dont la nature n'est pas spécifiée et dont la source et le mode d'établissement ne sont pas renseignés. La *finalité* est ramenée parfois à une croyance théologique à cause du manque d'explicitation des sources de la téléonomie, et dès lors les comportements qui se fondent sur la finalité seraient qualifiables de *non-rationnels*.

De tels comportements sont typiques des EAH et dès lors sont soumis à la gestion. Un argument de l'exposé sur «La Téléonomie», est que la *stratégie* relève de l'approche téléologique et que c'est une des raisons (l'autre étant celle de la méthode) pour lesquelles elle est considérée ici comme *non-rationnelle*. On n'a pas écrit "irrationnel" parce que, dans ces exposés, l'approche téléologique et stratégique est considérée comme d'une autre nature, mais ne s'oppose pas, à la rationalité.

4.2 Le point de vue de la conséquence

La précision et la clarté de ces concepts s'améliorent lorsqu'on spécifie la *nature* de la conséquence observable, ce qui demande de distinguer un *événement* d'une *situation*.

- Un *événement* est de nature ponctuelle et distinguable de façon autonome, alors qu'une situation ne peut se définir que par un ensemble de relations entre des entités et leur environnement. Un événement est considéré ici comme un phénomène parmi d'autres possibles, mais qui n'est pas présent avant son moment d'observation. Le fait qu'il apparaît devrait avoir une *cause*, et l'intérêt se porte sur le repérage de cette cause et la découverte de causes qui produiront cet événement de façon répétitive, toutes choses étant égales par ailleurs;
- Une *situation* est appréhendée par perception de ses effluves; elle se *ressent* plus qu'elle ne s'analyse, et elle serait "non-rationnelle" (comme la téléonomie ou comme la straté-

gie). L'émanation issue d'une situation est de la nature d'un "champ". Un exemple d'objet économique pouvant être considéré de la sorte est le "risque pays", objet de l'analyse politico-économique préalable à un investissement.

Lorsque le résultat observable est de la nature d'une *situation*, cette dernière peut être *modifiée* (mais non pas créée) par une "cause". La situation existait déjà auparavant et elle perdure, mais avec de nouvelles propriétés. Dans ce cas, on parlera plutôt d'un "effet sur" et la relation qui le produit ne sera pas de la nature d'une cause mais plutôt de celle d'une *influence*.

Il va de soi dès lors que le cas "cause-événement" est plus déterministe que celui de "influence-effet sur":

- Dans le premier cas, si tout fonctionne bien et qu'il n'y a pas d'aléa et perturbation externe, on pourrait écrire "si **u** alors on est sûr de **y**";
- Dans le cas de l'influence, on ressent que d'autres facteurs sont présents et on osera tout au plus dire que "si **u** alors une ou plusieurs propriétés de **y** se modifient".

Une version de la causalité qu'on pourrait exprimer par "signal-cause (**u**) événement-réponse (**y**)" est issue de l'ingénierie des télécommunications, mais elle a été généralisée à d'autres contextes que celui de l'information, par exemple les suivants:

- Une *impulsion* est courante en modélisation des systèmes physiques;
- L'expression *stimulus* est plutôt utilisée pour un input causal dans le domaine de la psychologie;
- La *dose* est indiquée en sciences naturelles, typiquement en médecine dans le cadre de l'administration de médicaments; l'effet produit est de la nature d'une *réponse*.

Le point commun entre ces versions est que **y** est *conséquence* de **u**.

Les formulations générales de la dynamique ne s'embarrassent pas trop de ces raffinements linguistiques, et expriment leurs modèles par les concepts d'*input* et d'*output*, même si l'input ne rentre pas physiquement dans quelque chose et que l'output n'est pas nécessairement un flux sortant de quelque part; c'est le prix à payer pour la généralité.

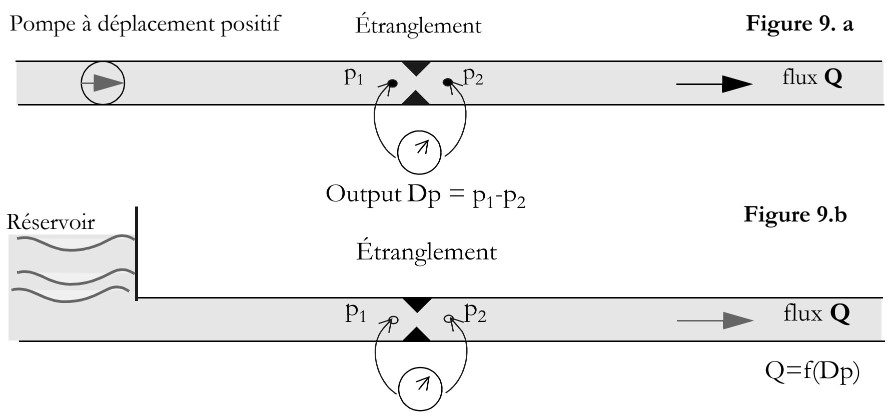
- La convention *dans ce contexte* est donc que des événements ou des choses qui se passent sont appelées outputs lorsqu'elles sont considérées comme la conséquence de causes, lesquelles sont appelées inputs;
- L'information issue, que ce soit de l'input ou de l'output, est qualifiée de *signal*. On y a rapidement assimilé l'objet et l'information qui y est associée, de sorte que la modélisation considère l'input aussi bien que l'output comme des signaux.

Ceci dit, le choix de définition du signal d'input et d'output dépend du processus sous revue et du propos de l'investigateur. Ainsi, pour un observateur, la température réelle régnant dans une pièce est un signal d'input et celle qui est lue sur le thermomètre est un signal d'output. L'égalité des deux dépend du calibrage du thermomètre. Dans l'exemple du chauffage, c'est le signal du thermomètre qui est un input et la température de la pièce qui est l'output; dans ce cas, il n'y a de relation causale (en tant qu'influence déterministe) que si les deux objets sont connectés.

Ceci ouvrirait un lourd débat sur les processus réversibles ou irréversibles et sur l'orientation de la causalité, ce qui dépasserait de loin le présent exposé. Pour l'illustrer on suivra un exemple élémentaire donné par AUSLANDER & al. (1974, *op. cit.*]. Le dispositif hydraulique de la Figure **9** montre un conduit présentant un étranglement.

- Quand le flux entrant est poussé par une pompe à déplacement positif, telle une pompe à piston (9.a), le taux Q du flux dans le conduit est l'input et la chute de pression dans le conduit, $\Delta p = p_1 - p_2$, est l'output. Donc, $\Delta p = f(Q)$.
- Si par contre la source est à pression constante, telle un réservoir (Figure **9.b**), c'est la chute de pression qui est l'input et le flux dans le conduit est l'output, soit $Q = f(\Delta p)$.

Figure 9. L'input et l'output lors d'un étranglement



En conclusion, il n'est pas nécessaire d'associer une causalité explicite aux relations d'input-output. Il suffit de considérer qu'un stimulus, une impulsion, un flux, un signal (qui porte en modélisation le nom générique d'input), est soumis à un processeur qui en fait (transformation, conversion) quelque chose de différent (appelé output) ou dont les propriétés sont modifiées (c'est un "effet sur") par le fait d'avoir reçu ce signal.

5 Forme générale et restrictions

5.1 Une remise en forme

L'expression générale du modèle mathématique classique de la dynamique sous influence sera d'abord déposé, puis sera rongé par des restrictions jusqu'à devenir praticable, c'est-à-dire pouvoir se prêter à une solution analytique compréhensible et n'ayant pas recours à du calcul numérique et des procédures de convergence. Soient un vecteur $\mathbf{y}(t)$ de variables d'output uniquement déterminées par le vecteur d'état $\mathbf{x}(t)$, et un vecteur d'inputs $\mathbf{u}(t)$, ce qui forme l'équation d'output:

(37) $\mathbf{y}(t) = \mathbf{\Psi}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t),t]$

Dans (37), $\mathbf{\Psi}$ est un vecteur p*1 de p fonctions fournissant les p outputs individuels. La version matricielle de (37) n'est qu'une liste de fonctions:

$$\mathbf{\Psi}[x(t), u(t), t] = \begin{bmatrix} \psi_1[x(t), u(t), t] \\ \psi_2[x(t), u(t), t] \\ \dots \\ \psi_p[x(t), u(t), t] \end{bmatrix}$$

La variation du vecteur d'état s'écrit:

(38) $\partial[\mathbf{x}(t)] = \mathbf{\Phi}[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0,t),t]$

où Φ est un vecteur n*1 de fonctions de variation depuis un état initial:

(39) $$\mathbf{\Phi}[x(t_0), u(t_0, t), t] = \begin{bmatrix} \phi_1[x(t_0), u(t_0, t), t] \\ \phi_2[x(t_0), u(t_0, t), t] \\ \dots \\ \phi_n[x(t_0), u(t_0, t), t] \end{bmatrix}$$

Le système (37)-(39) est la forme générale de dynamique sous influence en variable d'état et fonction d'observation. Pour le rendre praticable opérationnellement il faut expliciter des restrictions, ce qui par définition engendre des cas particuliers. Les grands classiques en sont l'invariance et la linéarité.

5.2 Invariance

Un système possède la propriété d'*invariance* lorsqu'une translation de l'axe temporel conduit à un système équivalent. Une façon de le constater est d'effectuer une translation de la fonction temporelle de l'input (par exemple $\mathbf{u}_{(t+\tau)}$) et d'examiner si la réponse $\mathbf{y}_{(t+\tau)}$ du système ayant subi la translation est la même que celle du système original.

Ainsi, le système $\partial\mathbf{x} = \mathbf{x}^2 + \mathbf{u}^2$ est invariant, mais $\partial\mathbf{x} = t\mathbf{x}^2 + \mathbf{u}^2$ ne l'est pas, puisqu'un déplacement vers (t-δ) fait ajouter un terme à la différentielle, celle de $\partial t\mathbf{x}^2$. Il se lit directement que le système est *invariant* quand les foncteurs Φ et Ψ de la forme canonique (37)-(39) sont des *constantes*, donc ne dépendent pas de t.

Lorsque la propriété d'invariance est satisfaite, les variables d'état $\mathbf{x}_q(t_k)$ ne dépendent que du vecteur d'état initial $\mathbf{x}(t_0)$ et de la séquence de vecteurs d'inputs $\mathbf{u}(t_0)$, $\mathbf{u}(t_1)$,... $\mathbf{u}(t_k\text{-}1)$, puisqu'il n'y pas d'autres fantaisies dépendant du temps qu'il fait ou de sautes d'humeur qui vont influencer la trajectoire.

Si le vecteur d'état est connu au temps t_k, l'état suivant sera complètement déterminé par l'information sur le vecteur d'input $\mathbf{u}(t)$, que ce soit dans le cas de systèmes *discrets*, (aux différences) ou dans le cas différentiel.

Dans le cas des processus discrets, les intervalles temporels sont dits constants lorsque les repères temporels t_k sont équidistants, par exemple d'une longueur $\tau = t_k - t_{k-1}$. Dans ce cas les écritures sont simplifiées, ainsi qu'on l'a déjà fait ci-avant sans le dire mais avec des intentions très pures.

5.3 Éloge de la linéarité

5.3.1 La forme canonique résultant de la linéarité

Soient:

- deux paramètres a et b,
- deux états $x_1(t_0)$ et $x_2(t_0)$,
- deux inputs $u_1(t)$ et $u_2(t)$,
- deux outputs leur correspondant, $y_1(t)$ et $y_2(t)$, et $t \geq t_0$.

Alors un système est linéaire si:

- l'état $x_3(t_0) = ax_1(t_0) + bx_2(t_0)$;
- l'output $y_3(t) = ay_1(t) + by_2(t)$;
- l'input $u_3(t) = au_1(t) + bu_2(t)$ est admissible dans le système, et $\mathbf{y}_3(t)$ et $\mathbf{x}_3(t)$ correspondent à l'état $\mathbf{x}_3(t_0)$ et à l'input $\mathbf{u}_3(t_0)$.

Ces conditions impliquent que lorsque des systèmes dynamiques abstraits avec input forcé (**u**) sont exprimés en variables d'état (**x**) et sont linéaires, les foncteurs de la dynamique sont des *opérateurs* de trajectoire *linéaires*, à savoir des *matrices* (**F,G,C,D**).

Ceci donne la *forme canonique discrète* en (40)-(41):

(40) $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}(k)\, \mathbf{x}_k + \mathbf{G}(k)\, \mathbf{u}_k$

(41) $\mathbf{y}_k = \mathbf{C}(k)\, \mathbf{x}_k + \mathbf{D}(k)\, \mathbf{u}_k$

Puis *continue* en (42)-(43):

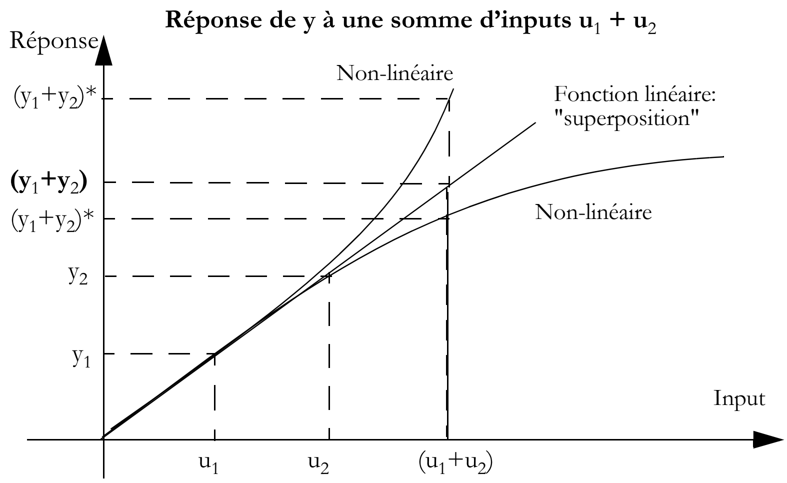
(42) $\partial\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t)\, \mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\, \mathbf{u}(t)$

(43) $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\, x(t) + \mathbf{D}(t)\, \mathbf{u}(t)$

Plusieurs qualifications de ces opérateurs sont proposées; ainsi on dit que:

- **F** est le "foncteur" de la variation autonome; (la "system matrix" en américain);
- **G** est littéralement la matrice *conductrice*, si on traduit le "driving" américain;
- **C** est la matrice *d'output*;
- **D** est la matrice de *transmission Directe*.

Figure 10. Illustration de la linéarité statique



5.3.2 Cohérence et interprétation des notations

La cohérence avec les autres exposés, et la transposition des opérateurs dans le théâtre de la gestion, fait adopter ici les qualifications suivantes.

- Dans la forme générique, **F** est le **F**oncteur de la variation libre ou autonome.

  Lorsque le modèle dynamique (différentiel ou aux différences) est linéaire et invariant, le foncteur **F** devient un opérateur *matriciel* souvent écrit **A** pour simplifier. Dans le cas *discret*, l'opérateur **A** permet de passer d'un état initial x_0 à un état x_k ultérieur par le produit des opérateurs, puisqu'il s'agit alors d'un processus en série. Dans ce cas, la matrice de transition d'état, depuis un indice initial m, est:

$$\mathbf{\Phi} = \prod_{j=m}^{k-1} \mathbf{A}(j)$$

- L'opérateur **G** qui transmet le *signal de commande* au processus est appelé ici la matrice de **G**ouvernement (la "driving matrix" en américain). Ce "**G**" est candidat à *gouverner* quelque chose quand on passera à l'analogie avec la gestion;
- L'opérateur **C** est la *matrice d'output* qui s'adresse à **y**, l'output "**C**ontrôlé";
- L'opérateur **D** est la matrice dite de *transmission* **D**irecte, du signal **u** à l'output **y**; cette généralisation fait donc l'hypothèse souvent très réaliste qu'un signal peut affecter directement l'ouput sans qu'il soit pris en charge par un opérateur se trouvant sur le chemin du contrôle.

Cela rappelle l'archange Gabriel, qui s'approche doucement, merveilleusement, de Marie, et lui dit:

«Je viens pour l'Annonce... »

5.3.3 La "Figure canonique"?

Utilisant ces notations, on peut éditer la Figure **11** qui est la configuration de la forme canonique des systèmes vectoriels linéaires (40)-(41) et (42)-(43).

- Dans le cas continu, on utilise l'opérateur inverse, **1/∂** pour l'intégration de **x** (pointé pour la dérivée), lui donnant son nouveau niveau $\mathbf{x}_i$; on peut aussi y mettre la variable complexe "s" de la transformée de Laplace;
- Le cas discret utilise l'opérateur inverse $\mathbf{z}^{-1}$ (argument de la transformée-z) pour indiquer le déplacement d'un intervalle de temps.

Figure 11. Forme canonique des systèmes input-output dynamiques linéaires

Figure 11 a : cas continu

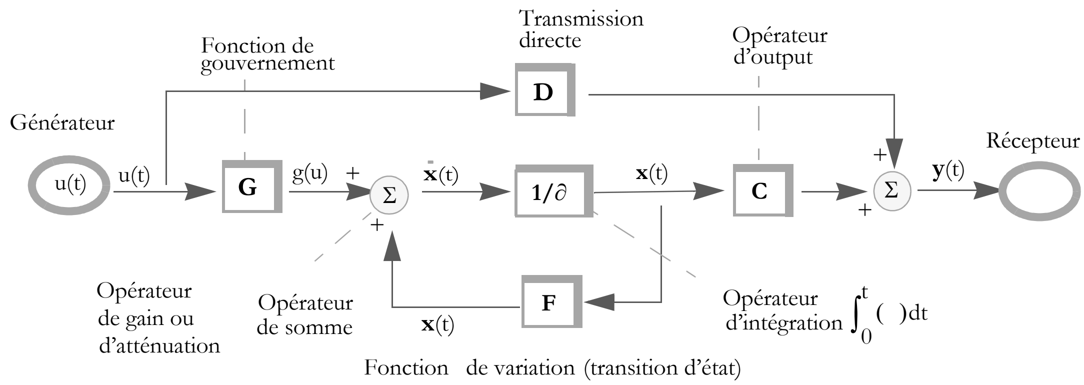
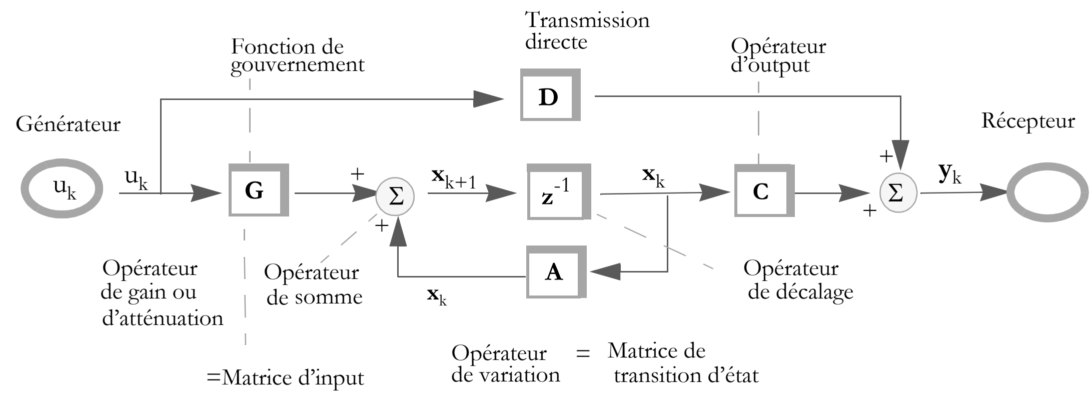


Figure 11 b: cas discret



6 Les trajectoires des systèmes "forcés"

Soit l'expression générale d'un système différentiel à input forcé:

(44) $\partial[\mathbf{x}(t)] = \boldsymbol{F}[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0,t)]$

Considérons d'abord le cas du premier ordre, continu à coefficients constants. L'équation d'état correspondante est, en écrivant des scalaires par légèreté d'esprit:

(45) $\partial x_{(t)} = ax_{(t)} + bu_{(t)}$ avec $x_{(0)} = x_0$

Une solution générale de (45) s'obtient par l'exploitation de la propriété de *superposition* des systèmes linéaires, en considérant que x(t) est constitué de deux parties à sommer:

- Une composante libre, disons x_{lib}, d'état initial x_0, mais d'input u=0;
- Une composante "forcée" par u(t), disons x_{gouv}, mais dont l'état initial est zéro.

La trajectoire de la composante libre a déjà été montrée:

$$x(t) = e^{at}\, x_0$$

Sa généralisation matricielle s'écrirait pareillement:

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\, \mathbf{x}_0$$

Pour traiter la partie forcée, définissons une nouvelle fonction temporelle z(t), telle que:

$$x_{gouv}(t) = e^{at}\, z(t)$$

Dès lors,

$\partial e^{at}z = a\, e^{at}\, z + e^{at}\partial z,$ ce qui fait, en exploitant les opérateurs:

$$(\partial - a)\, x_{gouv} = e^{at}\, \partial z$$

On peut alors écrire (20) pour x forcé:

$$\partial z = e^{-at}\, bu(t),$$

dont l'intégration donne z(t) (de valeur initiale nulle dans l'intervalle d'intégration) selon:

$$z(t) = \int_0^t e^{-a\tau} bu(\tau)d\tau$$

On obtient la trajectoire forcée, ou "gouvernée" par u(t):

$$x_{gouv} = e^{at}\int_0^t e^{-a\tau} bu(\tau)d\tau = \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau)d\tau$$

De la sorte, la solution générale de ce modèle additif est:

$$x(t) = x_{lib} + x_{gouv} = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau)d\tau$$

Cette solution présente une trajectoire de première classe: elle est gouvernée par l'intégrale d'un produit de deux fonctions temporelles dont les indices temporels sont en sens complémentaires, c'est-à-dire une intégrale de *convolution*. La somme et l'intégrale de convolution jouent un rôle suffisamment fascinant en traitement de processus sous influence (de séquences d'inputs) pour que la section spéciale **7.3**, équipée à cette fin, soit dépêchée sur les lieux.

7 Solution d'un système linéaire discret en variables d'état

7.1 Résolution du système

Considérons le cas de système invariant et une seule séquence d'input $\mathbf{u}$: $(u_0, u_1, \dots u_k)$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}u_k$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + d\mathbf{u}_k$$

où les dimensions matricielles sont au temps k: $\mathbf{A}[n_*n]$, $\mathbf{b}[n_*1]$, $\mathbf{c}_k[1_*n]$, $d[1_*1]$.

Pour rendre service aux Lecteurs âgés, voici une photo récente de ce système:

$$\begin{bmatrix} x_{1,\,k+1} \\ x_{2,\,k+1} \\ \dots \\ x_{n,\,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,\,k} \\ x_{2,\,k} \\ \dots \\ x_{n,\,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,\,k} \\ x_{2,\,k} \\ \dots \\ x_{n,\,k} \end{bmatrix} + du_k$$

Ce qui intéresse le dynamicien, c'est l'état du système au moment k, tel qu'il est issu de l'état initial x_0 et de la séquence d'inputs $u_0, u_1, \dots, u_{k-1}$.

On peut donc patiemment reconstituer son histoire depuis l'origine jusque "maintenant":

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}u_0$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}u_1 = \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}\mathbf{b}u_0 + \mathbf{b}u_1$$

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{A}\mathbf{x}_2 + \mathbf{b}u_2 = \mathbf{A}^3\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}^2\mathbf{b}u_0 + \mathbf{A}\mathbf{b}u_1 + \mathbf{b}u_2$$

....

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^j\mathbf{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^j\mathbf{b}u_{k-j-1}$$

Comme on aime bien les opérateurs (qui servent en mathématique comme ailleurs à faire fonctionner les systèmes sans qu'on s'en occupe), on définit ici:

$$\Phi(k) = A^k$$

D'où l'écriture générale de l'état et de l'output:

(46) $$x_k = \mathbf{\Phi}(k)x_0 + \sum_{j=0}^{k-1}\mathbf{\Phi}(j)\mathbf{b}u_{k-j-1}$$

(47) $$y_k = \mathbf{C\Phi}(k)x_0 + \mathbf{C}\sum_{j=0}^{k-1}\mathbf{\Phi}(j)\mathbf{b}u_{k-j-1} + du_k$$

7.2 Une propriété de l'opérateur de transition

L'opérateur de transition ***F*** a une propriété élégante, située dans les beaux quartiers des transformées. Soit la transformée-z, qui sera écrite *Z*(.) pour les systèmes discrets:

$$\boldsymbol{F}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

où $z = e^{-st}$, et s est l'argument de la transformée de Laplace des fonctions continues $\boldsymbol{f}(t)$:

$$\boldsymbol{F}(s) \Leftarrow \mathsf{L}[f(t)] \equiv \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Le système canonique peut être généralisé en présentant cette fois un *vecteur* d'input $\mathbf{u}_k$, de dimension [m], et un *vecteur* [p] d'outputs $\mathbf{y}_k$. Tout le système est alors matriciel:

(48) $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{Ax}_k + \mathbf{Bu}_k$

(49) $\mathbf{y}_k = \mathbf{Cx}_k + \mathbf{Du}_k$

Comme il va de soi, paraît-il, que

(50) $Z[\mathbf{Ax}_k] = \mathbf{A\,X}(z)$

où $\mathbf{X}(z)$ désigne le vecteur [n] des transformées-z de $\mathbf{x}_k$. Avec $\mathbf{Y}(z)$ et $\mathbf{U}(z)$ respectivement pour **y** et **u,** la transformée du système (46)-(47) s'écrit:

(51) $z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}_0 = \mathbf{A\,X}(z) + \mathbf{B\,U}(z)$

(52) $\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C\,X}(z) + \mathbf{D\,U}(z)$

L'équation (48) devient facile à résoudre pour $\mathbf{X}(z)$, qui est la transformée de l'état **x** aux moments intéressants:

(53) $[z\mathbf{I}\text{-}\mathbf{A}]\,\mathbf{X}(z) = z\,\mathbf{x}_0 + \mathbf{BU}(z)$

Espérant que la matrice $[z\mathbf{I}\text{-}\mathbf{A}]^{-1}$ existe, elle vient en prémultiplication des deux membres:

(54) $\mathbf{X}(z) = [z\mathbf{I}\text{-}\mathbf{A}]^{-1}\,z\mathbf{x}_0 + [z\mathbf{I}\text{-}\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{BU}(z)$

La transformée-z de l'état de départ $\mathbf{x}_0$ et d'un vecteur de séquences d'inputs **u** (dans les modèles, les éléments de **u** sont des *impulsions*) suffit pour obtenir le *vecteur d'état* dans l'espace des transformées; il reste donc à effectuer la transformée inverse $\boldsymbol{Z}^{-1}$ pour revenir dans un espace plus familier.

Ceci illustre d'ailleurs un sport assez pratiqué en théorie des systèmes, et singulièrement en physique théorique, qui est de changer d'espace. Ainsi on passe de l'espace du temps à celui des fréquences (par les transformées de Fourier), on se place dans l'espace de Hilbert, ou encore dans un espace-temps de MINKOWSKI ou celui de la relativité généralisée (le pire de tous). Bref, on se place dans des situations mathématiques dans lesquelles les opérateurs sont plus simples (par exemple linéaires, matriciels), certains facteurs de complexité ayant été en quelque sorte pris en charge par la définition de l'espace de référence.

Des problèmes *analytiques* complexes se ramènent de la sorte à des problèmes *algébriques*, dont les voies de résolution sont plus puissantes, et même parfois compréhensibles. Les débutants en connaissent des cas analogues élémentaires, par exemple celui de la transformation logarithmique qui remplace la formulation multiplicative par une additive. À quand un espace spécial pour la gestion, simple et assez large pour que les Chefs puissent s'y mouvoir avec une certaine aisance?

Le vecteur d'output **y** au temps k (donc kτ intervalles de temps de longueur τ à partir du moment des conditions initiales) s'écrit formellement comme (47), mais avec les dimensions matricielles des opérateurs (**B**, **D**) adaptés à la généralisation aux inputs multiples figurant comme éléments du vecteur **u**:

(55) $$y_k = \mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}(k)x_0 + \mathbf{C}\sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{\Phi}(j)\mathbf{B}u_{k-j-1} + \mathbf{D}u_k$$

Mettant un œil sur (50) et l'autre sur (51) on voit que:

(!) $$\Phi(k) = \boldsymbol{Z}^{-1}\,\{z[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\}$$

Et voilà la *propriété remarquable*: la matrice "fondamentale" de cette dynamique est la transformée-z inverse de la matrice $z[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$.

À présent, (54) est reprise pour écrire l'ouput **y** selon:

(56) $$\mathbf{Y}(z) = \{\mathbf{C}\,[z\mathbf{I}\text{-}\mathbf{A}]^{-1}\,\mathbf{B} + \mathbf{D}\,\}\,\mathbf{U}(z)$$

qui s'écrit plus sobrement:

(57) $$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}(z)\,\mathbf{U}(z)$$

où $$\mathbf{H}(z) = \{\mathbf{C}\,[z\mathbf{I}\text{-}\mathbf{A}]^{-1}\,\mathbf{B} + \mathbf{D}\,\}$$

Ce nouvel opérateur matriciel $\mathbf{H}_{ij}$, de dimensions $[p_* m]$, est la *matrice de transfert qui prend en charge la dynamique* d'un tel système discret linéaire en variables d'état **x**, où p outputs sont engendrés par une dynamique influencée par un vecteur **u** de m inputs. Cette matrice est là pour offrir le comportement du i^e output (ou "signal d'output") lorsqu'on applique au système un ensemble de m inputs d'indice j:

(58) $$y_i(z) = \sum_{j=1}^{m} H_{ij}(z)u_j(z) \qquad \text{pour chaque output } i=1 \text{ à } p.$$

Comme on n'oubliera jamais que par l'expression **(!)** ci-dessus $\Phi(k)$ est la transformée-z inverse, on peut de la sorte ramener la matrice de transfert $\mathbf{H}[p_* m]$ dans l'espace temporel et la situer au moment (k) par (59):

$$(59) \quad \mathbf{H}_k = L^{-1}[\mathbf{H}(z)] = \mathbf{C}\,\Phi(k\text{-}1)\,\mathbf{B} + \mathbf{D}\,\delta_{0k}$$

Ce (59) est très intéressant. En effet, il peut être simplifié car on se souvient de ce que pour les systèmes linéaires $\Phi(k) = \mathbf{A}^k$, c'est-à-dire que la transition de k périodes se fait par l'exposant k de la matrice de transition **A**. Dès lors,

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \qquad \text{pour } k\geq 1$$

Cette fonction de dynamique est très élégante, ayant les vraies qualités de simplicité et de sobriété, de celles qui font le bon goût et font faire des économies. De plus, on lit dans (58) ou (59) que tout élément $\mathbf{H}_{ij}(z)$ de la matrice de transfert $\mathbf{H}(z)$ est la transformée-z du i^e^ output en réponse à une séquence delta de Kronecker appliquée au j^e^ input.

Donc: $\mathbf{H}_0 = \mathbf{D}$,

car au moment initial il n'y a pas encore de dynamique autonome et l'output est engendré seulement par **D** qui s'applique directement à $\delta=1$, l'impulsion de Kronecker à ce moment.

On est rassuré quant au cas particulier où **y** et **u** sont scalaires (donc un seul output et input); en effet $\mathbf{H}_k$ est alors aussi scalaire et est la *séquence de pondérations* ("weighting sequence"). On retrouve donc y_k comme somme de *convolution*:

$$\mathbf{y}_k = \sum_{j=0}^{k-1} H_{k-j} u_j \qquad \text{et } \mathbf{y}_0 = \mathbf{D}\, u_0$$

La portée opérationnelle de ceci est grave. Soit en effet un système symbolique linéaire d'équations différentielles, qui est sagement immobile, à la façon d'un moine thibétain en méditation. Si on a sa réponse à une impulsion ponctuelle (une piqûre de guêpe ou la fonction d'échantillonnage delta de DIRAC), on peut évaluer sa réponse à tout input (formé d'une séquence numérique) en utilisant l'*intégrale de convolution*.

Pour un système discret on travaille sur des *séquences* de nombres et non sur des signaux continus; la séquence qui dans ce cas a des propriétés analogues à celles de la fonction d'impulsion delta de Dirac est la séquence de Kronecker, spécifiée par:

$$u_k = \delta_{jk} = 1 \text{ pour } k=j, \qquad \text{et} = 0 \text{ pour } k\neq j$$

Si l'indice j=0, l'impulsion δ est $u_k = \delta_{0k} = 1$, donc appliquée "maintenant". Si on connaît le mode de réponse à cette impulsion de "1", on peut en déduire algébriquement ce qui se passe pour différentes fonctions d'impulsions, car celles-ci sont construites sur la fonction élémentaire $u_k = \delta_{0k}$.

Mieux! Si un système linéaire peut engendrer un output constant en état stabilisé après avoir reçu un input ponctuel d'amplitude q, il donne le "DC-gain" par le *rapport* de sa *réponse* à l'état stable *à cette amplitude* q. Ceci est le fondement des raisonnements sur les réponses ultimes des systèmes (linéaires) aux impulsions.

7.3 Une petite convolution

Cette fameuse *convolution* est un être mathématique qui joue un rôle important dans beaucoup de domaines impliquant directement ou indirectement des réponses à des impulsions. C'est ainsi qu'on le retrouvera aussi en statistique, dans les fonctions génératrices, dans les traitements de signaux digitaux et dans la projection de séries chronologiques (celles qui relèvent du domaine des filtres linéaires).

Peu développé chez les gestionnaires primitifs, avant les cours de systémique, "l'esprit de convolution" est une pourtant belle mentalité pour celui ou celle qui est en charge d'une dynamique, par exemple celle de l'étude de l'écologie ou d'autres problèmes à impulsions-réponses.

Il suffira ici de la faire apparaître dans le cas le plus simple, à savoir celui d'un système linéaire discret dont l'output y_t est construit par la séquence familière:

$$y_k = b_0\, u_k + b_1\, u_{k-1} + \dots + b_n\, u_{k-n} - a_1\, y_{k-1} - a_2\, y_{k-2} - \dots - a_n\, y_{k-n}$$

C'est un output très réaliste parce qu'il est construit par une variété linéaire de *ses propres valeurs* antérieures (y_{k-j}) *et des impulsions* **u** en le moment k et en remontant dans le temps (par k-n). On fera l'hypothèse que l'output y_k est nul avant le moment k=0. Comme $u_0=1$ (l'impulsion en k=0), on a la réponse simple de "maintenant":

$$w_{(0)}: \qquad y_0 = b_0\, u_0 = b_0$$

Mais quel est l'avenir de y? Il faudra qu'il combine sa propre série de valeurs "jusque là" avec la série des impulsions, et cela en croisant les indices du temps puisqu'il faut construire chaque futur de l'un par le passé de l'autre : c'est ce que fait la *convolution.*

Elle sera généralisée après un premier coup d'œil sur la séquence engendrée, où, si on le laisse s'exprimer librement, $w_{(k)}$ va bientôt vouloir dire quelque chose.

$$w_{(1)}: \qquad y_1 = b_1\, u_0 - a_1 y_0 \qquad = b_1 u_0 - a_1 b_0$$

Intéressant? On va plus loin?

$$w_{(2)}: \qquad y_2 = b_2\, u_0 - a_1 y_1 - a_2\, y_0 = b_2 - a_1 b_1 + a_1^2 b_0 - a_2 b_0$$

Comme on dit dans les ouvrages supérieurs, "nous laissons au lecteur le soin de"... continuer à faire des y_k – disons, pour être raisonnable, jusque $y_{57.823}$.

La séquence $w_{(k)}$ ainsi obtenue s'appelle séquence de *pondération.* Ses valeurs seront combinées avec les valeurs antérieures de l'output pour former le nouvel output au temps k par (a):

(a) $$y_k = \sum_{j=0}^{k} w_{(k-j)} \cdot u_j \qquad \text{pour } k=1, 2,...$$

On voit bien dans (a) le rôle de toutes les valeurs antérieures (depuis le 0). Ceci formalise l'argument selon lequel les *conséquents* (les y) ne sont pas *ponctuels* mais ont une "mémoire" des impulsions antérieures (u) et des réponses (y) qui y sont associées. Cette forme de mémoire (par les indices temporels négatifs) est une application directe de celle définie dans l'exposé sur «Les Modèles de processus».

Soit une transformation temporelle qui définit:

	t = k-j,
de sorte que	t = k quand j=0,
et	t = 0 quand j=k,

où k est "maintenant" et j est l'"ancienneté", comme le montre le petit tableau suivant

Tableau 1. Les indices de la convolution

j	0	1	2	...	k
t = k-j	k	k-1	k-2	...	0

Donc si on est en k=5, quand est-ce que "t=3"? La réponse est "il y a deux périodes". Pour le cas de t=4 ce serait "il y a une période". Cela a donc bien commencé en t=0. On est dès lors dans le bon sens pour écrire (a) comme devenant (b):

(b) $$y_k = \sum_{t=k}^{0} w_{(t)} u_{k-t}$$

ce qui est pareil à (c):

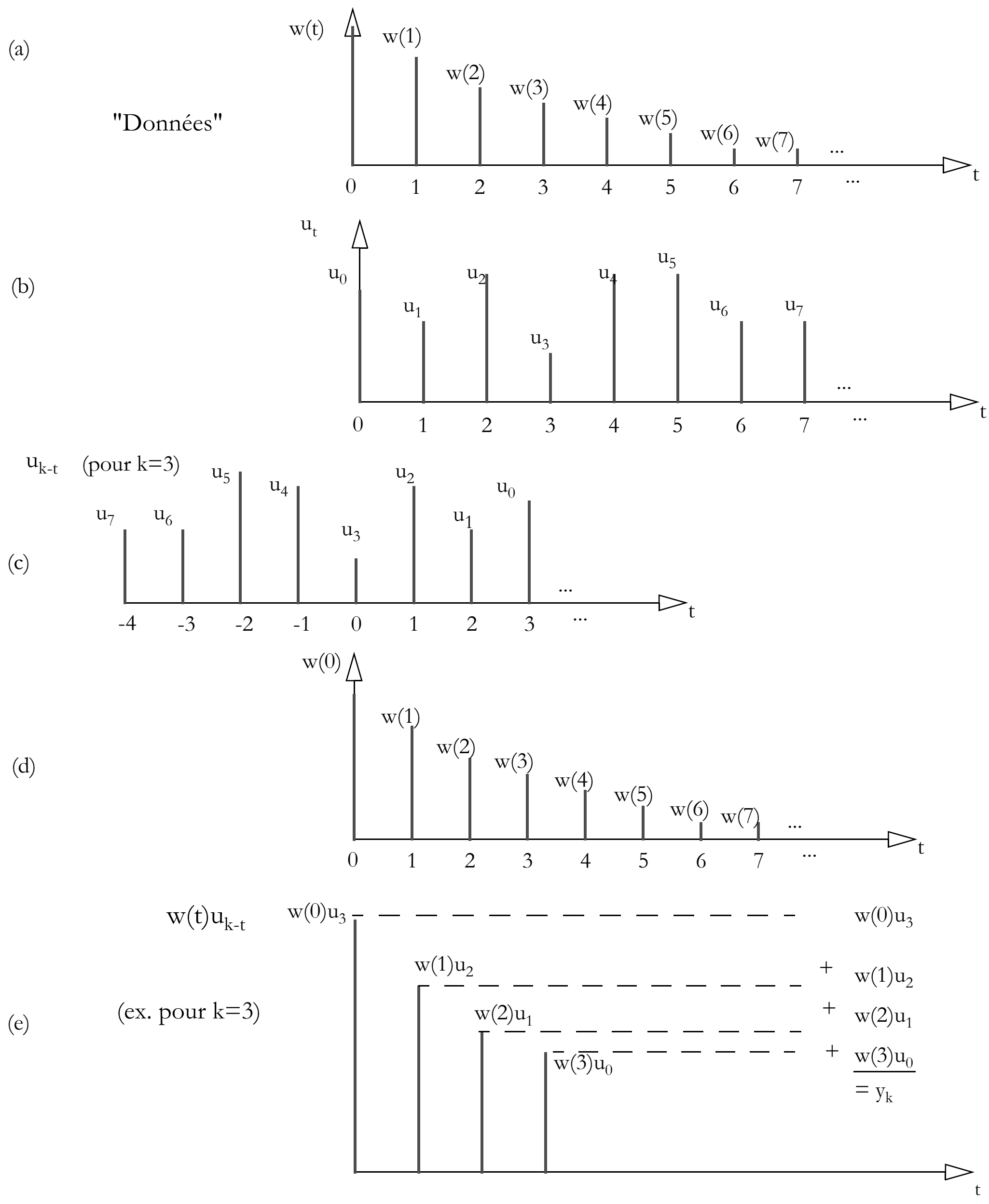
(c) $$y_k = \sum_{t=0}^{k} w_{(t)} \cdot u_{k-t}$$

Par temps clair, lors des nuits sans lune, on peut voir cela graphiquement à la Figure **12**. La séquence de pondération $w_{(k)}$ a une tête exponentiellement décroissante, et celle des impulsions (u_k) est très quelconque.

Pour obtenir (c) à partir de (b), il suffit de lui dire de se retourner, de se regarder dans un miroir, puis de faire une translation sans rotation de k unités de temps. Vu la souplesse nécessaire, on comprend alors pourquoi la convolution n'est pas plus répandue dans les séquences d'un certain âge. L'output y_k (montré en (e) mais ici non calibré graphiquement) est bien sûr obtenu par la sommation des composantes correspondantes. Les séquences de pondérations sont indépendantes pour les systèmes linéaires discrets.

Bien que de nombreuses publications présentent cette matière très courante, il serait poli de remercier CADZOW et MARTENS (*Discrete Time and Computer control Systems*, Prentice-Hall, 1970, pp. 39 et environs) d'avoir déjà eu à l'époque le mérite d'écrire quelque chose de vraiment compréhensible et de bonne référence pour longtemps. Leurs notations ont été ici adaptées, et quelques mises au point de forme ont cependant été apportées aux fins de cohérence.

Figure 12. Composition de la somme de convolution



Pour rendre hommage à ces braves gens et leur collaboration, on va reprendre leur idée (CADZOW et MARTENS, *op. cit.* p. 201) et l'aménager pour confronter de façon résumée les écritures discrète et continue respectivement. Ceci constitue le Tableau **2**, lequel fournit de plus une synthèse des apports formels parcourus dans cette section.

Tableau 2. Formulation des systèmes continus et discrets

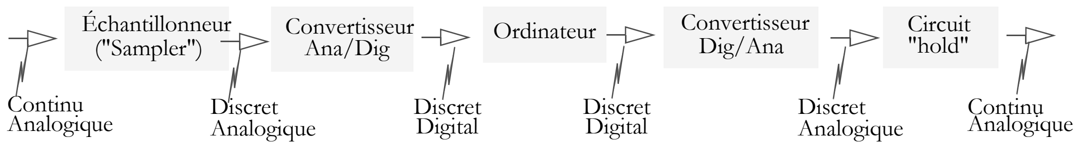
Dynamique	Système continu	Système discret
(a) Transition unitaire	$\partial y = b\ y + b\ u$	$y_{(k+1)} = b\ y_{(k)} + b\ r_{(k)}$
(b) Transformée de (a)	$sY(s) - y(t_0) = bY(s) + bU(s)$	$zY(z) - z\ y(t_0) = bY(z) + bR(z)$
(c) Forme canonique	$\partial x(t) = \mathbf{F}(t)\ x(t) + \mathbf{G}(t)\ u(t)$ $y(t) \ = \mathbf{C}(t)\ x(t) + \mathbf{D}(t)\ u(t)$	$x_{k+1} = \mathbf{F}(k)\ x_k + \mathbf{G}(k)\ u_k$ $y_k \ = \mathbf{C}(k)\ x_k + \mathbf{D}(k)\ u_k$
(b) Transformée de (c)	$sX(s) - sx_0 = \mathbf{F}\ X(s) + \mathbf{G}\ U(s)$ $Y(s) = \mathbf{C}\ X(s) + \mathbf{D}\ U(s)$	$zX(z) - zx_0 = \mathbf{A}\ X(z) + \mathbf{B}\ U(z)$ $Y(z) = \mathbf{C}\ X(z) + \mathbf{D}\ U(z)$
(d) Matrice de transition	$\Phi(t) = e^{\mathbf{F}t}$	$\Phi(k) = \mathbf{A}^k$
(e) Transformée de (d)	$\Phi(s) = [sI - \mathbf{F}]^{-1}$	$\Phi(k) = z[zI - \mathbf{A}]^{-1}$
(f) Matrice de transfert	$H(s) = \mathbf{C}\ \Phi(s)\ \mathbf{G} + \mathbf{D}$	$H(z) = z^{-1}\mathbf{C}\ \Phi(z)\ \mathbf{B} + \mathbf{D}$
(e) Transformée inverse de (f)	$H(t) = \mathbf{C}\ \Phi(t)\ \mathbf{G} + \mathbf{D}\delta(t)$	$H(k) = \mathbf{C}\ \Phi(k\text{-}1)\ \mathbf{B} + \mathbf{D}\delta_{0k}\ (k\geq1)$ $= \mathbf{C}\ \mathbf{A}^{k-1}\ \mathbf{B}$ (en linéaire) $H(k) = \mathbf{D}$ (pour k=0)

8 Application du processus input-output au traitement de signaux

L'échantillonnage par séquence d'impulsions est un concept fictif utilisé par convenance mathématique. Parmi les systèmes "réels" dont ceci est le *modèle*, on trouve essentiellement les processus d'échantillonnage des calculateurs et contrôleurs digitaux. La contribution de CADZOW et MARTENS (*ibid.*) est encore appelée pour ce thème.

L'optique du traitement de signaux concerne principalement la conversion. En effet, la commande de processus étant confiée à des ordinateurs, il faut que tous les signaux puissent être traités sous la forme discrète et digitale ; une séquence typique qui est traitée par cette voie de la théorie des systèmes peut être représentée par la Figure **13**, où les boîtes contiennent des processus de conversion.

Figure 13. Séquence de conversions de signaux en vue du contrôle digital



L’"échantillonneur" ("sampler" en anglais) transforme le signal continu en un signal discret qui consiste en une séquence de valeurs échantillonnées prélevées sur le signal continu original (en général à des intervalles constants). Le signal continu original et le signal échantillonné ont en commun le fait d’être *analogiques*.

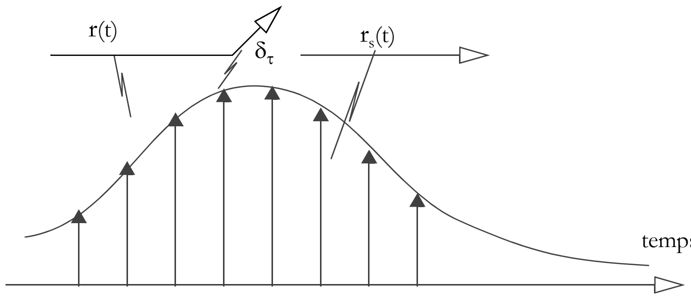
- La propriété d’être *analogique*, qui peut être associée à un signal continu ou discret, implique qu’il n’y a aucune restriction sur l’amplitude du signal dans une étendue donnée;
- Un signal *digital* a une amplitude restreinte à un ensemble borné de valeurs.

Opérationnellement, il est plus simple d’utiliser l’échantillonnage dit par *impulsions*, qui est une fiction mathématique mais dont la fonction est particulièrement claire. La Figure **14** montre que le signal continu r(t) est échantillonné par la fonction de pulsation de Dirac $\delta_{(t)}$, où le temps de pulsation est écrit T.

Sur cette Figure **14**, l’output du processus, à savoir les valeurs $r_s(t)$ de la fonction échantillonnée ("sampled"), sont exprimées par la séquence temporelle des impulsions pondérées par les valeurs de r(t) aux instants d’échantillonnage, c’est-à-dire la somme de convolution (60).

(60) $$r_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(kT)\delta(t-k)T$$

Figure 14. Échantillonnage par impulsions de Dirac et séquence résultante



Avec cet output échantillonné $\mathbf{r}_s(t)$, tel que construit en (60), il faut à présent faire un signal continu, disons c(t). À cette fin, il est exprimé par la transformée de Laplace, dans le domaine où le signal $\mathbf{r}(t)$ est nul pour t<0:

(61) $$L[\mathbf{r}_s(t)] = \int_0^\infty \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{r}(kT)\delta(t-kT)e^{-st}dt$$

Soit $\mathbf{R}(s)$ cette transformée. Maintenant, si la séquence (60) sert d'input à un processus dont la fonction de transfert est:

(62) $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s) / \mathbf{R}(s)$

Il en résulte une fonction d'output continue donnée par:

(63) $c(t) = r(kT)$ pour $kT < t < (k+1)T$

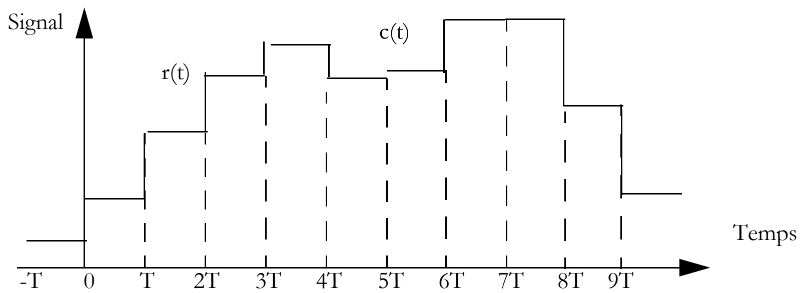
Quelles leçons en tirer? La transformation (63) fait passer du discret au continu en "conservant" une valeur, sur un temps T, par un opérateur qui en anglais s'appelle un "zero-hold operator". La Figure **15** montre un peu naïvement si cela se passe bien.

La portée pratique de cet exploit est considérable dans le domaine de l'ingénierie. En effet, le contrôle de processus (réels, industriels) se conduit par un dispositif physique permettant la correction d'écart par rapport à une référence.

Il se fait effectivement par une (ou plusieurs) variable(s) de contrôle, désignée(s) ici par m(t) en tant que fonction temporelle continue. Cette variable est appliquée à un processus pour donner à celui-ci un comportement plus conforme à la référence $\mathbf{r}(t)$. Ce comportement est désigné dans ce schéma élémentaire, par une seule variable continue, disons c(t).

L'objet d'un tel système de contrôle est de trouver une forme fonctionnelle du signal de contrôle $e_1(k)$, à savoir la relation entre le signal de valeur (fonction) de référence r(t) et la valeur observée de c(t), qui maîtrise le comportement dans le temps de c(t).

Figure 15. Opérateur "hold" retenant des valeurs r(t) d'input; output c(t) continu



9 Dynamique sous influences dans le domaine réel

9.1 Les extensions mathématiques

Les formulations mathématiques des sections **7** et **8** sont très élégantes, mais perverses:

- L'échantillonnage par séquence d'impulsions est un concept fictif utilisé par convenance mathématique. Dans les systèmes *réels* dont ceci est le *modèle*, on n'en trouve que dans les processus d'échantillonnage des calculateurs et des contrôleurs digitaux.
- Le modèle de base est celui d'un processus "gelé" dans ses conditions initiales qui, ensuite, recevant une impulsion, entame sa trajectoire. La fonction de transfert gère cette dynamique et donc la trajectoire. Dès lors, connaissant les conditions initiales et l'opérateur de la dynamique, l'état est "prévisible" à tout instant, sauf... imprévu.

Dans le cas de linéarité, les extensions à vecteurs d'inputs et outputs ont les mêmes expressions formelles car les opérateurs plus généraux sont matriciels. Lorsque l'impulsion n'est pas seulement initiale, mais aussi séquentielle (elle survient à chaque nouveau repère temporel), seule la forme simple d'une séquence de valeurs discrètes reste néanmoins praticable.

Lorsque les opérateurs eux-mêmes (**F, G, C, D** ou les matrices **A** et **B**) sont *variants*, donc dépendants du temps qui passe, l'évolution ultérieure est chaque fois à reconsidérer selon le dernier statut des opérateurs. Tant que cette variation des opérateurs est exprimée par des fonctions temporelles simples, le même formalisme peut encore être appelé pour spécifier les trajectoires, et donc l'évolution du vecteur d'output y. Il reste cependant le problème que la dynamique ne s'arrête pas. On ne sait pas quand l'effet d'un input s'éteint en faveur d'un autre, ou s'ils se combinent, se cumulent, ou qu'est-ce que c'est qu'ils fricotent ensemble? Ce sont de tels ébats que prend en charge la *convolution*, mais modérément, sous peine d'"inextricabilisation".

9.2 Représentations structurelles

Le centre d'intérêt dominant de l'étude de systèmes dynamiques est le comportement de la réponse influencée par des *signaux* qui changent dans le temps. Cette réponse dépend à la fois de ce signal d'input et des caractéristiques du système. Des aides graphiques à la compréhension et la description de systèmes complexes sont devenues conventionnelles depuis longtemps (les réseaux, les configurations par blocs, les graphes de flux de signaux et les graphismes de la simulation analogique – bref les jouets présentés en *systémographie*.

De cette panoplie, la représentation *iconique* et la configuration par *blocs* ont le plus de succès, mais pour quelles raisons?

- D'abord parce que c'est plus facile: il faut être moins malin pour les comprendre que pour interpréter des graphes de flux ou des êtres mathématiques sujets à réflexion;
- Ensuite parce que ces configurations ont la propriété de représenter un type *générique* d'entités et relations, qui ne dépend donc *pas* de la nature de l'objet représenté, ni de leur contexte, ni de la discipline scientifique dans le cadre de laquelle l'objet est appelé.

Ainsi par exemple:

- L'*accumulation* d'un flux donne une capacité, une charge, un stock en toute situation dynamique, qu'il s'agisse d'eau, d'électricité, de monnaie ou de produits;
- L'utilisation instantanée d'une *puissance* est le produit d'un effort par un flux;
- Un *délai* peut se présenter aussi bien en temps de réaction humaine qu'en agriculture, en transport ou en ordonnancement de production.

Lorsque de tels concepts et relations deviennent *génériques*, ils peuvent être manipulés via leur substitut mathématique et dès lors elles sont assemblées ou transformées comme suit par des opérateurs:

- La *composition* d'entités additives se fait par un opérateur de *sommation*;
- L'*accumulation* par une intégration;
- L'*amplification* par un opérateur de gain;
- Un bête délai δ se formule par une fonction de transfert exponentielle négative dans l'espace des transformées (à savoir e^{-st}), ce qui a l'air beaucoup plus intelligent.

Une tradition graphique fait mettre ces *opérateurs* dans des *boîtes*, de sorte que l'ensemble du processus est décrit par une configuration de boîtes directement connectées. Dès lors la vision ne se repose pas, parce qu'il n'y a pas de situations intermédiaires; rien d'observable ne peut être reconnu avant que toutes les affaires ne soient mathématiquement réglées et seul l'output final (et, sur demande, son historique) est livré. Dans les descriptions de processus moins sévères, les opérateurs deviennent des transformations de nature moins symbolique et chaque transformation a un effet sur quelque objet qui est, lui aussi, représenté sur le processus.

À ce moment, il faut distinguer deux conventions graphiques différentes: d'une part ce qui est *transformateur* et d'autre part ce qui est *transformé*. C'est comme cela que naissent les configurations dont l'interprétation visuelle est réaliste, ce qui sera d'ailleurs le cas de l'exposé sur «La Dynamique sous contrôle».

En ce sens, la modélisation dynamique, dont quelques lignes classiques viennent d'être parcourues, ne concerne pas qu'un éther paraissant abstrait et imaginaire du point de vue de la gestion. Celle-ci, ne faisant qu'accueillir, engendrer, transformer et transférer de l'énergie et de l'information, est un gros client de la symbolique, dont les formulations dynamiques ont une validité tout aussi pertinente qu'ailleurs. Toutefois, c'est leur *transposition* dans la démarche courante de la gestion qui, il faut le reconnaître, est loin d'être évidente.

L'interface entre les deux (entre la *théorie* des systèmes et sa *modélisation* d'une part, et le *domaine réel* de la gestion d'autre part) est, selon les arguments présentés dans le «Prélude aux systèmes», l'affaire de la systémique; cette assertion trouve un peu de réconfort ici dans les expressions de la dynamique.

Quoi qu'il en soit, avoir un peu de culture sur les opérateurs de changement d'état, sur la séparation de la dynamique "libre" et "forcée", sur l'oubli et le maintien de conditions initiales donne des idées espère-t-on plus fondées sur les façons dont passe le temps dans les EAH, et spécialement comment comprendre et influencer ce passage du temps ainsi que prédire les effets de l'intervention.

9.3 Un exemple néo-réaliste de dynamique sous influence

Soit à présent un processus qui subit l'action d'un agent, disons comme tout le monde **u**(t) : cet agent influence le processus en ce sens qu'il contribue à la transition d'état. La Figure **16** est un exemple de tel processus avec changement d'état, où ce changement est d'une part engendré par la dynamique *autonome* [$\partial\mathbf{x} = F(\mathbf{x}, \mathbf{u}(t))$], et d'autre part, influencé par des *agents extérieurs* **u**(t).

Ce processus est celui de la propre putréfaction d'un Lecteur, à savoir les états transitoires depuis le moment initial $t = t_0$ de son décès jusqu'à l'état stable dans lequel le corps du défunt n'a plus d'intérêt pour le milieu écologique de son environnement immédiat. Ce processus est considéré comme irréversible, parce que régi par le temps thermodynamique. En effet, l'entropie du cadavre est croissante, et se manifeste d'ailleurs visuellement par la décomposition. Il est cependant possible de l'accélérer puisque la dispersion des cendres dans la nature donne immédiatement, surtout s'il y a du vent (ce qui est une interférence), une répartition et maximise l'entropie.

Certaines croyances remettent cependant en doute l'assertion de non-réversibilité, mais la réincarnation qu'elle implique demande un apport d'énergie considérable qu'on ne trouve que rarement dans les urnes funéraires.

> [...]
>
> Les mouches bourdonnaient sur ce ventre putride,
> D'où sortaient de noirs bataillons
> De larves, qui coulaient comme un épais liquide
> Le long de ces vivants haillons.
>
> [...]
>
> Et pourtant vous serez semblable à cette ordure,
> À cette horrible infection,
> Étoile de mes yeux, soleil de ma nature,
> Vous, mon ange et ma passion !
>
> Oui ! Telle vous serez, ô la reine des grâces,
> Après les derniers sacrements,
> Quand vous irez, sous l'herbe et les floraisons grasses,
> Moisir parmi les ossements.
>
> Alors, ô ma beauté : dites à la vermine,
> qui vous mangera de baisers,
> que j'ai gardé la forme et l'essence divine,
> de mes amours décomposés.

Charles Baudelaire,
"Une charogne"
Spleen et idéal, XXIX,

Figure 16. Un processus réel à changement d'état influencé par des "agents"

y observable:	États x(k)	Opérateur de l'input G	Agent u(k)
État "vivant"	x(-k)		
État instable, non-déterministe	x(k)	Décès = discontinuité, "catastrophe"	Agent 007: Facteur de décès: interférence (aléatoire ou intentionnelle) hors du potentiel de contrôle
État "cadavre"	x(k+1T)	Pièces buccales piqueuses et suceuses exploitant le blanc des yeux.	Agent 1. Diptères (Musca et curtonevra). Une paire d'ailes membraneuses implantées sur le deuxième anneau du thorax, et deux balanciers sur le troisième anneau
Raideur, déficience immunitaire	x(k+2T)	Exploitation de l'épiderme	Agent 2. Calliphora et Lucilia, au début de la décomposition. Pièces piqueuses ou suceuses.
Début de décomposition	x(k+3T)		
Fin de l'Agent 2 après environ 3 mois.		Fermentations butyriques et ammoniacales	Agent 3. Action combinée des bactéries et des sucs digestifs rejetés par les larves: l'état se liquéfie.
Début de liquéfaction	x(k+4T)	Dégraissage	Agent 4. À partir de 3 mois, intervention de coléoptères (genre Dermestes) et lépidoptères Aglossa pinguinalis, se nourrissant sur tout des graisses.
Dégraissage du cadavre	x(k+5T)		
	x(k+6T)	Action sur les matières protéiques en fermentation	Agent 5. Les larves de Piophila petasionis: matières protéiques en voie de fermentation.
		Exploitation des matières protéiques fermentées	Agent 6. Coléoptères du genre Corynetes. Exploitent les matières protéiques fermentées
	x(k+7T)	Absorption des dernières sanies	Agent 7. État décomposé mais contenant de l'humidité: les Acariens en absorbent les dernières sanies.
			Agent 8. État desséché et momifié: larves des Attagènes et des Anthrènes.
	x(k+8T)	Occupation et prolifération larvaire	Agent 9. Phase terminale: les chenilles d'Aglossa cuprealis.
Réincarnation (non démontrée)		Occupation et exploitation par les chenilles	État stable: Le cadavre n'apporte plus de contribution écologique significative ou monétaire.

10 La représentation de l'évolution d'un EAH

Le problème posé à présent est celui de la représentation synthétique, donc un modèle, de l'*évolution* d'un EAH. Encore une section qui va patauger dans les mares (y en a), aller nulle part mais se tordre les chevilles dans les ornières laissées par les convois de Sciences Nobles. Ces convois somptueux s'éloignent de la gestion, emportant avec eux les derniers regards hagards des gestionnaires déféquant sur les illusions perdues rejetées dans les fossés quand passent ces Sciences sans même les éclabousser de leur gloire.

Les rares Lecteurs qualifiables d'ordinaires croient que, pour parler d'évolution, on va leur raconter une "*Histoire d'un EAH*" sur le ton à la fois badin et inquiétant que l'on croit devoir prendre quand on raconte aux enfants que c'est aussi vrai qu'à la télé. Mais plutôt que de faire pleurer dans les chaumières, mieux vaut essayer de grignoter quelques possibilités en posant d'abord de bonnes questions:

- *Pourquoi* faire un modèle descriptif de l'évolution, et, peut-être, pour *qui*?
- Quelle *définition*, quelle acception du concept d'évolution choisir?
- *Quand* commencer la description?
- *Quels aspects* raconter, mettre en évidence?
- *Comment* représenter cette évolution, à tout le moins ses aspects considérés comme intéressants?
- Y a-t-il une version "*systémique*" de cette évolution des EAH, qui soit *générique* et donc indépendante du type et de l'activité de tel EAH particulier?

Voilà les questions posées; mais qu'en faire?

10.1 Pourquoi décrire l'évolution?

Bonne question: pas de réponse! Il est pourtant fréquent de lire des études concernant un EAH qui commencent par raconter un bref ou traînant "historique". C'est très bien: "Celui qui parle sème, et celui qui écoute récolte". Mais, à nouveau, qu'en faire? En quoi un *Tiers*-Mondiste s'intéresserait-t-il aux *demi*-mondaines? C'est ennuyeux et cela ne rapporte rien, mais il est pourtant impensable d'élaborer une politique sensée pour quelque collectivité que ce soit sans s'informer de son passé, de ses us et de ses os.

Voici néanmoins deux arguments en faveur d'une description de l'évolution:

- Le premier est le besoin de correspondance entre le concept d'évolution et ce qui, dans ces exposés-ci, est appelé la "mémoire collective". Un apport théorique d'une telle correspondance est de se rendre compte de la "stabilité structurelle" de l'organisation pour se faire des idées sur les changements possibles qu'on pourrait y apporter, sur le degré de décongélation de cette organisation qui la rendrait plus ou moins réceptive à une *intervention* visant à l'améliorer;
- Le deuxième argument est que le développement ultérieur de l'EAH (après le "t" actuel) serait déjà engendré par des "états" ($\mathbf{x}_{t-k}$) passés et par des impulsions ($\mathbf{u}_{t-k}$) données antérieurement. On comprendra alors l'utilité de connaître ces impulsions, et à quoi elles peuvent conduire, avant de faire une nouvelle intervention.

Pour donner à ces arguments quelque support, il faut pouvoir suggérer des domaines où une telle description peut certes rendre service:

- Un premier domaine d'application serait celui des échecs scolaires: des impulsions auraient été données, de nouvelles mesures seraient prises et on s'intéresserait à leur possible efficacité avant d'en lancer de nouvelles. Cela va de soi, mais qui a réellement fait cette analyse avant d'accrocher son nom au portemanteau des réformes?

  De plus, la correspondance avec la trajectoire (réussite scolaire ou non) prédéterminée par les états antérieurs (milieu familial, qualité des établissements) y est souvent durement constatée – bien qu'on n'ait pas prouvé qu'elle soit inexorable.

- Une application dans le domaine de la santé est celle du statut médical.

  L'état clinique actuel du patient serait considéré comme une brève phase observée d'une évolution qui peut être caractérisée par le développement d'une affection, ou par une thérapie déjà en cours dont les effets sur les processus du patient sont encore transitoires, et il peut être mal à propos de percuter ces effets par de nouvelles orientations thérapeutiques.

- Une troisième application est celle de nouvelles mesures politiques, prises tandis que les effets des précédentes commencent parfois seulement à se manifester.

  Ainsi, pour laisser leur nom à une rue, ou à un square qui sera chaque jour honoré par des chiens-chiens, un politiqueux lance un nouveau régime de l'enseignement, plus cher et pire que le précédent dont c'est alors qu'on se rend compte qu'il n'était pas si mauvais. Mais quand le nouveau régime est à son plein rendement de ratés et découragements, son auteur est déjà réfugié politique au parlement européen, intouchable et infiscalisable parasite supranational.

Un processus temporel très différent peut aussi être constaté, à savoir d'étonnantes différences de timing et vitesses entre des effets et leurs stimuli. En effet, on constate parfois que des entreprises et des particuliers sont capables de contrer ou tirer parti de prochaines mesures fiscales à une vitesse fulgurante; l'argent peut détaler devant l'impôt plus vite qu'un Beuhr devant une camionnette à gyrophare bleu.

Des financiers (commettant un délire d'information) peuvent donner aux physiciens stupéfaits des exemples de réactions prenant place *avant* leurs causes, en lançant des mouvements financiers qui sont déjà les résultats de mesures... *ultérieures* qui les concernent.

Cependant, les EAH ne sont pas des processus physiques déterminés. On ne nous dit pas combien de temps attendre pour que s'éteignent des "réponses" en cours (si elles s'éteignent) ni dans quelle mesure la stabilité ou l'instabilité antérieure et la rémanence des inputs sont des conditions de réticence ou au contraire de promotion de la réceptivité à de nouvelles influences. Ainsi des *discontinuités* de certaine ampleur (c'est-à-dire conduisant à des changements qualitatifs ou "de phase") peuvent être issues, comme l'enseigne la théorie mathématique des *catastrophes*, de faibles perturbations, alors que n'apparaissent guère de symptômes précurseurs d'un inattendu.

Il est, paraît-il, des terres brûlées
donnant plus de blé qu'un meilleur avril

Jacques BREL, dans "Ne me quitte pas"

10.2 Quelle définition, quelle acception du concept d'évolution?

On se permet de faire beaucoup de choses avec l'évolution: par exemple, en *tenir compte*, la *subir*, ou dire qu'on la *constate*; on peut aussi la *prévoir* ou même en faire une thèse. Mais ce qu'on fait très peu, semble-t-il, c'est la *définir*.

Une façon de définir ce concept et le rendre utile sans tout le temps tripoter des Petit Robert est de le circonscrire en disant ceci: pour qu'un processus soit qualifiable d'"évolution" il faudrait que les quatre conditions suivantes soient réunies:

- Le *sujet* de l'évolution est une entité, ou une collection d'entités, définie par au moins une propriété d'*homogénéité* (comme une espèce, une race, un "type de"), et présentant une *interaction* de fonctions;
- Il y a une suite de *transformations* progressives;
- Les transformations sont plutôt émergentes de processus *autonomes* qu'importées de l'environnement;
- Les transformations invoquées peuvent conduire à de *nouvelles* propriétés et même à de nouvelles définitions ou nouveaux statuts de l'entité concernée.

Ces conditions méritent un bref commentaire.

a Le sujet de l'évolution est une entité cohérente

Cette condition de cohérence implique que la transformation s'adresse au *tout*. S'il s'agit de morceaux qui se lancent à l'aventure dynamique selon leurs propres processus, on parlera d'une *dislocation* et on ne poursuivra plus cette entité en tant que globalité.

La condition de race, d'espèce, ou d'homogénéité demande de décider ceci:

- Cette entité ou cette collection doit-elle être de caractère vivant, à savoir capable de survivre, se reproduire et se développer, comme le voudrait un *organisme* de bon aloi?
- Ou bien est-il permis aussi de parler d'évolution d'objets communs, telle que celle de la chaussure, ou celle des armoires?

Bien sûr, il y a aussi l'*interface* entre l'objet et le vivant qui peut évoluer; ainsi en serait-il de l'évolution du vêtement féminin... Tranchons dans le vif: on n'acceptera pas ici que l'*objet commun* évolue, mais en revanche on acceptera que ce qui peut évoluer soit sa *figuration*, sa *mise de l'idée dans le temps*, comme le design d'un objet ou la mode qui le concerne. Cette variation dans le temps de "l'idée qu'on se fait de" pourrait logiquement s'appeler la *transfiguration*, mais qui oserait parler ainsi, et l'enseigner, sans risquer d'être jeté à la Meuse enduit de goudron et de plumes?

Au-dehors de l'organicisme, c'est donc *la mise de l'idée dans le temps* qui a de la vie et qui peut être le sujet de l'évolution. C'est ainsi qu'en bonne compagnie il est légitime de causer, très à l'aise entre gens du même monde, cela va sans dire, de l'*évolution* des mathématiques dans le groupe BOURBAKI ou de l'évolution du concept des fonctions supérieures de l'esprit chez les successeurs de JUNG et SINGER.

b Il y a une suite de transformations progressives

Les transformations "évolutives" sont donc d’un autre tempo que celui des *révolutions*, lesquelles sont caractérisées par plus de soudaineté, ou que celui des *mutations*, qui sont caractérisées par on ne sait pas quoi. En évolution, le processus temporel de l’objet peut être décrit selon des *phases* distinctes mais sans qu’il soit nécessaire de pouvoir en spécifier le moment précis et le mode de passage d’une phase à l’autre.

Sur cette propriété va reposer l’odyssée de l’entité: on pourra en parler en spécifiant les *différences entre les phases*. Ceci conduit souvent à parler en terme de *périodes*, comme il se fait normalement dans certains domaines. Ainsi en est-il des ères préhistoriques (comme le vérolithique inférieur), ou de l’histoire (le "Printemps de Prague"), ou encore du domaine de la peinture où, par économie, certains peintres, tel Picasso, n’ont utilisé qu’une couleur à la fois, ce qui donne leur "période bleue", ou "période rose" (rarement noire).

c L’émergence interne

On a dit, dans les conditions définissant l’évolution, que les transformations sont plutôt *émergentes* de processus autonomes internes à l’entité, que dues à des facteurs externes. Les transformations faites par des interventions externes ne seraient donc pas de l’évolution au sens spécifique, mais on ne peut nier l’évolution par *adaptation*, de par le sérieux des arguments qui la soutiennent, et il va de soi que l’adaptation est une des réponses à des changements extérieurs à l’entité. Pour relever du concept d’évolution, l’adaptation ne doit alors pas être une capacité immédiate de réponse à de nouveaux stimuli, mais bien une modification *progressive* de certaines propriétés de l’entité orientées *graduellement* vers la capacité de pouvoir maîtriser ces nouveaux stimuli ou nouvelles conditions.

d Émergence de nouvelles propriétés.

In fine, on demande que les transformations invoquées puissent conduire à de nouvelles propriétés et même à de nouvelles définitions ou nouveaux statuts de l’entité concernée. On acceptera que, contemplant des phases d’évolution, une entité ou une "espèce" (pour autant que ce mot puisse s’appliquer à des collectivités humaines) présente de telles différences par rapport au type initial qu’un nouveau nom ou statut doive lui être octroyé.

10.3 Quand commencer la description ?

De façon très pragmatique, on peut demander poliment au descripteur quand il voudrait faire commencer l’évolution de son entité, c’est-à-dire à quel moment du passé? Comme il pourrait être un Lecteur, et qu’il n’aime donc pas qu’on se moque de lui, il répondra "au début, évidemment". Mais est-ce encore jouer sur les mots de dire qu’il ne faut pas confondre l’*origine* et le *commencement*?

Le mot *origine* a trois acceptions intéressantes:

- La première est celle de *provenance*;
- La deuxième, beaucoup plus formelle, est celle de *point* à partir duquel se mesurent les coordonnées sur un axe (abcisse ou ordonnée);
- La troisième a trait à la *causalité*: une action, une innovation, un comportement peuvent trouver leur "origine" dans un événement ou une situation.

Le *commencement*, quant à lui, se définit comme étant la première partie d'une chose, d'une action, d'une période. Il est donc intéressant aussi, en ce sens qu'il nous dit que ce qui s'est passé avant n'est pas utile, ou encore que le machin n'existait pas encore.

Plutôt que de donner un "point" temporel de départ (une date, un événement), on préférerait alors initier l'évolution par l'exploitation des trois acceptions du mot "origine":

- Pourquoi la chose existe;
- Quelle est sa provenance;
- Quel est, et quand est, le *commencement* de ce qui intéresse l'investigateur.

10.4 Quels aspects raconter, mettre en évidence?

La description de l'évolution se doit de parler:

- Des *états*, ou, pour les EAH, des *situations* successives. Cette composante dit quand la dynamique *se repose*;
- Des *transformations* qui conduisent à des changements de phases repérables. Cette composante dit quand la dynamique (de changement d'état) s'*active*.

Ces deux descriptions, états et transformations, sont devenues familières de par les exposés sur la systémographie et les descriptions de processus en général (ou plutôt "en générique", car ils peuvent être de tout type: réels, mathématiques ou symboliques).

Ceci a une implication descriptive. En effet, du point de vue visuel:

- La première version, privilégiant les *états*, mettra ceux-ci dans des boîtes ou des vecteurs d'indicateurs, les supposant quasi-invariants entre deux activations de processus de changement. Ces derniers seront montrés sur les relations (les arcs orientés) situés entre ces états atteints;
- La deuxième version, celle privilégiant les *processus* de transformation, situera ceux-ci dans les boîtes de processus et les *arcs* orientés qui les relient transportent du *temps* pendant lequel l'état précédent resterait quasi-invariant;

  D'ailleurs, lorsqu'on demande une description d'évolution d'EAH à l'homme de la rue (avant qu'ils soient tous écrasés par des camions), il décrira plutôt "ce qui s'est passé", donc les changements observables, que des situations ou des états.

Cependant les états atteints et les transformations n'épuisent guère les aspects à prendre en compte dans une évolution; ainsi devrait-on privilégier encore:

• Les *ouputs* observables	"Dans le temps, ça crachait une fumée jaune";
• Les *processus* d'activité	"Dans le temps on flambait les écrevisses *avant* de les mettre en brochettes";
• Les *interventions* extérieures	"Les Khmers Rouges en ont fait à présent une Maison du Peuple";
• Le *contexte*	"C'était au temps où Bruxelles dansait..." (J. BREL).

In fine, le seul guide raisonnable restera l'*utilité* pour la compréhension et la prédiction de la dynamique autonome du sujet et de ses réponses à des impulsions (au cas où il en aurait encore à son âge).

10.5 Fouille d'une description "systémique" de l'évolution des EAH

On dit de certains auteurs qu'ils sont des "puits de science", mais ici, kif-kif le dromadaire, il a fallu bosser dur pour traverser sans boire le désert des publications en matière de modes de description de l'évolution des EAH.

Pour en exhumer, il faudrait peut-être faire des fouilles dans des sites de l'ancienne Égypte, dans des mastabas gardées par des sphinxes, où des savants anciens auraient momifié leurs pensées que l'on redécouvrirait progressivement, en enlevant les bandelettes, une à une, précieusement, comme on verrait apparaître la peau d'une danseuse dans la pénombre propice du CRAZY HORSE. Peut-être là, gravée en signes ésotériques et idéogrammes de symboles mystiques, la Réponse a attendu la venue de la secte des Systémiciens, elle seule capable de la décoder et de la transmettre, Graal de l'Évolution, aux chiantifiques mous d'aujourd'hui, qui n'explorent que les sites contemporains situés au pays de l'Internet où l'on préfère surfer que penser.

Les cartes d'époque montrent deux voies *systémiques* de description de l'évolution d'un EAH:

- Soit établir un répertoire prédéfini des aspects et contenus d'un tel rapport descriptif, qui soit "générique", donc quasi-indépendant du *sujet* (qui le fait) et de l'*objet* (qui est décrit). Un tel répertoire est présenté dans l'exposé sur «L'Investigation»;
- Soit rester systémicien teigneux et se limiter aux thèmes qui relèvent manifestement de ce que la théorie des systèmes et ses modélisations proposent de mettre en jeu;
- Une approche neutre (par rapport à l'objet et au sujet) serait de rester dans le domaine symbolique et de se servir du formalisme des graphes de signaux et des opérateurs.

Et s'il était tout de même vrai que « rien n'est plus pratique qu'une bonne théorie? » (c'est de K. LEWIN, il le rappelle chaque fois). Cela mérite d'être essayé. Dans la dernière version, neutre et symbolique, une vision *systémique* demanderait alors de présenter les correspondances avec les variables et fonctions suivante, issues de la *forme canonique* de la dynamique sous influence:

$\mathbf{x}_{(t)}$: les *états* (Voyez dans quel état j'erre!);

$\mathbf{y}_{(t)}$: les ouputs, visibles comme *indicateurs* observables qui disent donc la réalité;

$\mathbf{u}_{(t)}$: les *événements* externes, *influences*;

$\mathbf{m}_{(t)}$: les variables d'*intervention*, de commande, de décision;

$\mathbf{F}(t)$: les processus, foncteurs, générateurs de la dynamique des *changements* d'activité;

$\mathbf{D}(t)$: les changements *directement* dus aux influences $\mathbf{u}(t)$;

$\mathbf{G}(t)$: les processus d'*intervention*, le *foncteur* de la prise en charge par le Gouvernement.

Ces êtres mathématiques réapparaissent, avec leur signification et leur analogue en gestion, dans l'exposé sur la «La Dynamique sous contrôle». Pour l'heure, on ne peut guère en faire grand-chose, mais ils permettent de vendre alors une expression assez chic de l'évolution en dynamique des EAH qui ressemblerait à:

- «Soit une *trajectoire* $\mathbf{x}_{(t)}$, issue d'un *état initial* $\mathbf{x}_0$,
- Dotée d'une élégante *dynamique* autonome $\mathbf{F}(t)$ (donc qui fonctionne aussi pendant qu'on joue au golf),
- Gratifiée de vecteurs d'*inputs* $\mathbf{u}_{(t)}$ qui l'ont influencée (dans le bon sens?),
- Par le génie d'un *opérateur* $\mathbf{G}(t)$ qui la *gouverne*, et ceci à des moments k privilégiés (un drink a été offert à ces occasions),
- Avec un opérateur $\mathbf{\Phi}$ qui engendre des *outputs* observables $\mathbf{y}_{(t)}$ (si observables que les Chefs ne cessent d'y attirer l'attention),
- Et enfin qu'elle soit confiée à une somptueuse fonction de *transfert* $\mathbf{H}(z)$, dont l'art des transformées permet d'exprimer n'importe quel *état.*»

Transposé dans le domaine de la gestion, cela reste beau mais ça risque d'être aussi bête qu'une valse de STRAUSS. De plus, c'est une version cousue pour les «Précieuses ridicules» à la Molière. Non: il faut rester dans un domaine réel, terre-à-terre, où traîne de la gestion des EAH, et qui ne se prête ni à la correspondance directe, ni à l'application effective d'une telle expression mathématique de l'évolution. Alors, méfiance vis-à-vis de ces phrases en dentelles; elles sont jolies pendant un quart d'heure, mais peuvent ensuite dégrader le propos et offrir à la dérision un problème qui a sa place et son sérieux dans le domaine de la gestion, et n'est d'ailleurs pas tellement facile à traiter.

Tout au plus pourrait-on s'autoriser à s'inspirer du *formalisme synthétique* des systèmes discrets pour avoir un *modèle* de référence. Car enfin, l'expression de l'évolution en mathématique n'est elle aussi que langage et ne sert également que de simulateur symbolique pour les systèmes physiques à réaliser effectivement.

10.6 Comment représenter l'évolution sur une feuille de papier?

L'idée du Tableau **3** (c'est pas la sienne, et il est trois pages plus loin), c'est de présenter l'évolution en s'inspirant de l'expression des processus en variables d'état. Il convient alors, pour réaliser celui-ci, de le présenter comme une succession d'*états* (que l'on ne mentionne que lorsqu'ils ont changé) et de *transformations* concernant plusieurs facteurs de complexité prélevés de l'exposé ad hoc et adaptés à ce propos. Des correspondances plus ou moins fumeuses y sont établies avec les êtres mathématiques et les idées que vient d'incuber in vitro la section **10.5**. Hélas, en raison des têtes de colonnes qui le conduisent, il a mal tourné au moment où il allait devenir présentable.

Encadré de gestionnaires, le Tableau **3** fait défiler des êtres qui étaient mathématiques dans leur formation initiale mais qui, dans leurs errements, ont crevé par inadvertance l'interface entre la théorie des systèmes et les problématiques trans-humaines; ils se sont alors retrouvés, dignes, austères, très *smart* mais pantois dans les lieux communs... du Domaine de la Gestion.

Il va de soi qu'il n'y a aucune raison de remplir toutes les cases du tableau. En effet, tandis que le temps passe, l'évolution des EAH se fait par des interactions entre des facteurs de complexité et non par des champignons qui poussent ici ou là dans un tableau trop régulier, et qu'on veut bourrer derechef parce que c'est plus esthétique que quelques renseignements épars sur la pelouse comme les cendres et petits os restants de tante ADÈLE dont le parchemin de la vie ne se déroulera pas plus loin.

L'honnêteté intellectuelle (ou qui le serait si on était honnête et intelligent) requiert cependant sur cette misère quelques remarques peu encourageantes.

- Cette gageure de la représentation de l'évolution aide, en sous-produit important, à faire la part des choses entre la systémique et la rigidité, et même à les opposer (pour ceux qui fréquentent trop les maisons d'intolérance).

  En effet, un bon système n'est pas un bunker; il peut être souple, adaptatif, de paramètres ondoyants quand le vent tourne. Or un tableur n'est qu'une présentation visuellement quadrillée selon deux entrées pour la commodité des écritures et la saisie de leurs relations. Un tableur ne structure ni un problème, ni une mathématique: le programme d'ordinateur le définit comme un plan de rectangles quadrillé et dit essentiellement quel objet est à quel endroit, donc quelles sont les coordonnées sur l'écran que l'informatique attribue à cet objet.

  Il est donc inadéquat, on le répète encore, de concevoir un objet original (surtout habité par des gens!) de par l'outil dont on dispose pour le représenter;
- L'histoire ne dit pas s'il est opportun, en description d'évolution, de placer des repères temporels équidistants, ce qui aiderait à voir le tempo des transformations, ou s'il vaut mieux placer un nouveau repère chaque fois qu'il y a quelque chose à situer et, de la sorte, éviter de longs vides sans intérêt;
- On se demande aussi ce qu'il est bon de spécifier au premier niveau, celui de l'*origine* et du *commencement*;
- Une tentation est de faire état de "ce qui s'est passé". Le narrateur mettra dans ce cas l'accent sur de petites ou grandes bourrasques des environnements ainsi que sur les interfaces et régulateurs ayant permis d'y faire face ou de s'y adapter. C'est peut-être plus intéressant, mais c'est de l'histoire, ou des histoires d'alcôve, et non pas une *évolution*, telle que définie ci-avant par des propriétés de *transformations autonomes*;
- Il y a de quoi rester perplexe quand on essaie de mettre certains renseignements, pourtant pertinents, dans ce Tableau **3**. Ainsi, dans le cas de trusts et sociétés consolidées (de bons clients pour une description d'évolution en gestion), il serait de bon ton de montrer les périodes d'acquisitions de sociétés, de fusions, d'OPA, enfin les coups bas venus d'en haut. Une idée? Peut-être l'image de cet aspect de l'évolution serait-t-elle celle d'une sorte d'oued qui se fond dans les sables... par extinction de liquidités.

À quoi peut leur servir de se lever matin
eux qu'on retrouve au soir désarmés incertains
Louis Aragon, «Il n'y a pas d'amour heureux»

Quoi qu'il en soit, il faudrait essayer sur des exemples, en avoir besoin. Les seuls mérites de cette présentation-ci sont celui de la synthèse et celui de tenter de distinguer:

- Les changements des composantes *passives*; celles-ci en deviennent une autre, différente, comme les "situations";
- Les changements des composantes *actives*, telle **G**(t) qui gouverne; celles-ci se mettent à *faire* les choses autrement, ou des choses différentes de celles d'avant.

Tableau 3. Évolution: états et transformations par thème

T	États et Transformations	Sources extér. de transform. Interférences, Événements **u**(t)	Sources inter. de transform. Impulsions **r**(t)	"Modèle de", Interfaces externes, Téléonomie	Structure (Implantation, Équipements Organisation)	Processus (Régies, Exploitation)	Outputs **y**(t)
↓	Origine, Commencement	Contexte init.ial	Création, Les débuts...	$\mathbf{x}_{(0)}$	$\mathbf{x}_{(0)}$	$\mathbf{x}_{(0)}$	
	ÉTATS $\mathbf{x}_{(t)}$	Situation (t)		$\mathbf{x}_{(t)}$	$\mathbf{x}_{(t)}$	$\mathbf{x}_{(t)}$	$\mathbf{y}_{(t)}$
	Transfo F(t) **Transfo G**(t)	Événements Interférences	$\mathbf{m}_{(t)}$	**D**(t) **G**(t)	**D**(t) **G**(t)	**D**(t) **G**(t)	
	ÉTATS $\mathbf{x}_{(t+k)}$	Situation en (t+k)		$\mathbf{x}_{(t+k)}$	$\mathbf{x}_{(t+k)}$	$\mathbf{x}_{(t+k)}$	$\mathbf{y}_{(t+k)}$
	Transfo F(t+k) **Transfo G**(t+k)	Événements Interférences	$\mathbf{m}_{(t+k)}$	**D**(t+k) **G**(t+k)	**D**(t+k) **G**b	**D**(t+k) **G**(t+k)	
	...	...	...	...	...	...	...

L'idée fondamentale du Tableau **3** (c'est toujours pas la sienne) est donc celle des successions "état-transformation" appliquée aux thèmes principaux des EAH, et qui justement se retrouvent dans la méthodologie de «L'Investigation».

10.7 Séquelles et effets secondaires

La Lectrice passionnée (mais oui) qui aurait aimé la dynamique sous influence, et n'en aurait pas honte, en prendra bien encore un petit peu. On a devisé gentiment de processeurs, de foncteurs etc., et surtout d'inputs qu'on leur met quelque part pour les faire fonctionner. Mais ce dont on parle trop peu, c'est de leurs séquelles, d'effets associés et secondaires, ayant pour origine des inputs qui ont été ingérés, souvent pour améliorer ou affecter un état ou une trajectoire. Le petit document suivant est là uniquement pour rendre service en incitant à être prudent avec sa santé avant de s'envoyer une séquence d'inputs pharmagiques dans le processus (si c'est comme cela qu'on l'appelle).

Soit donc que cet état de santé **x**(t) ne soit pas trop bon. Très précisément, la personne soi-même serait un peu *fiévreuse*, ou aurait quelques « douleurs d'origines diverses, dentaires ou musculaires», ou des « règles douloureuses» (comme celles en bois des institutrices anglaises qui tapent sur les doigts?).

Il y a sur le marché de nombreux médicaments anti-douleurs de courte durée qui aident la patiente, et sont faits par des laboratoires compétents et sérieux – là n'est pas la question. Intéressons-nous à l'un d'entre eux, très courant, vu à la télé, ici appelé $\mathbf{u}(t)$, puisqu'il a le rôle d'input dans la patiente, laquelle est le processus, le "plant" de ce présumé régulateur.

Lorsqu'on peut se procurer un appareil qui permet de zoomer la notice de ce médicament à 400% au moins, on peut alors y lire que l'état initial ($\mathbf{x}_0$), simple vecteur des petites douleurs citées ci-dessus, peut s'aggraver, et ce avec un fameuse intégrale de convolution. Le fournisseur le signale soigneusement et – on l'espère! – exhaustivement dans la notice dont une clef est recopiée ici.

«Quels sont les effets non souhaités et gênants du médicament:

«Comme tout produit actif, ce médicament peut entraîner des effets plus ou moins gênants comme:

- Dans certains cas rares, un saignement digestif (rejet de sang par la bouche ou l'anus avec coloration des selles en noir) d'autant plus fréquent que la posologie est élevée.

  Dans ce cas il faut immédiatement arrêter le traitement.
- Des douleurs d'estomac, des flatulences;
- Des vomissements ou nausées;
- Une éruption sur la peau, des démangeaisons;
- Une crise d'asthme;
- Des vertiges, des maux de tête, des troubles de la vue;
- Une maladie des reins;
- Des modifications biologiques comme:
  - une anémie (taux anormalement bas de globule rouges dans le sang);
  - une atranulocytose (taux anormalement bas de globules blancs dans le sang pouvant entraîner des infections);
- Des modifications transitoires des paramètres du foie (transaminase). »

À votre bonne santé, et...

Sois sage, ô ma douleur, et tiens-toi plus tranquille
Charles Baudelaire

10.8 Cela mène à quoi, l'évolution?

Les livres hébraïques (de la Genèse) ont pour formule initiale "Bereshit", c'est-à-dire *Au commencement*. S'inpirant de cela, on devrait faire démarrer l'évolution en invoquant l'"étiologie", laquelle vient du (vieux!) grec "Aïtia", la *cause*, et "Archè", le *commencement*. Dans cette voie (citée par A. Paul: *Et l'homme créa la Bible*, pp. 297 et sq.), on explique donc la chose par son commencement:

- Une cité, par son fondateur (par exemple Rome fondée par Remus et Romulus);
- Un rite, par un incident qui a servi de commencement;
- Un peuple, par un individu du premier-né de la terre, ou par un premier "roi";
- Une époque historique et des générations mythiques (par exemple la Guerre de Troie, les "royaumes" ancestraux des Hébreux).

Ainsi du commencement d'un Ensemble d'Activités Humaines: son *fondateur*, un *incident* (ou une découverte, une *idée*), un *groupe* ou une *époque* historique *spécifique* lui a donné sa "raison d'être", à partir de laquelle il a suivi les différentes voies possibles de son évolution.

Ainsi en est-il aussi des gens qui trouve intressante leur généalogie – par laquelle, peut-on dire, ils ont "commencé".

Étudier sa généalogie, c'est creuser une profonde excavation dans la famille et son passé et découvrir ses conditions initiales, à savoir les seuls aïeux qu'il est admissible d'exhumer devant la Gentry qui nous toise, d'un sourcil levé de curiosité, et d'un autre sourcil froncé du dédain qu'inspire la roture. Et même si ces conditions initiales s'efforcent d'être un mode de génération de l'*avenir* (c'est quand, çà?) du régime social individuel, seul le Prochain Testament (après l'Ancien et le Nouveau) peut nous apprendre ce que nous réserve le passé.

D'ailleurs, on la voit venir, cette fin d'évolution, surtout celle des EAH: c'est celle du deuxième principe de CARNOT, celle de la négentropie, de l'enthalpie (qui dit d'un cœur qu'il devient froid et indifférent), bref c'est le principe de la mort thermique, privilège des vieillards éructant leurs derniers chicots dans une *moribonderie*.

Là ils retrouveront, devenue la charogne de Charles BAUDELAIRE, la superbe SABENA, déesse toujours en voyage de noces, dont on apercevait la longue traîne blanche entre les nuages, un peu sorcière aussi, volant à califourchon sur un manche à balai tenu par un pilote aux galons d'or...

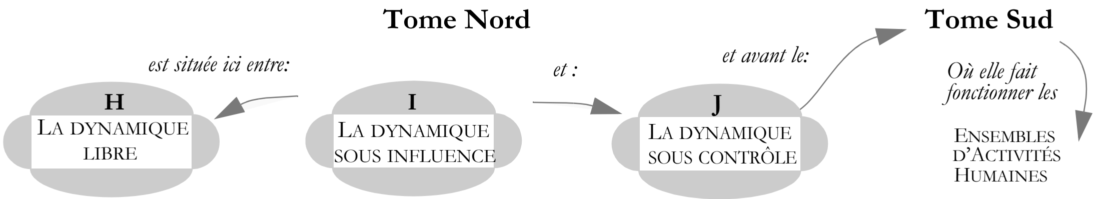
Ainsi donc le petit monde des EAH aurait des fantasmes d'évolution inspirés du Cosmos: parfois issu d'un enthousiaste Big Bang, débordant de chaleur active et humaine au point d'exploser, lâchant de nouvelles entreprises, des *spin-offs* d'espoirs chauffés (au rouge) se répandant dans des activités (en noir), il passe sa vie dans des interstices entre des prédateurs fiscaux, des concurrents concupiscents, des édiles corrompus, des immatriculés aux Bananas, des sauvages qu'on dit grèves, des Japonais, enfin ils sont en pleine *dynamique sous influence*, que celle-ci s'écrive ou non avec $x_{(t)}$, $y_{(t)}$, $u_{(t)}$, des foncteurs et autres gadgets qui la calibrent et la calculent.

Méfiez-vous de l'assassinat: il conduit facilement au mensonge,
et même à la dissimulation
Sacha Guitry

11 Les Voies et réseaux de la dynamique sous influence

11.1 Une insertion subtile

Figure 17. Insertion de la dynamique sous influence dans les exposés



11.2 Le baiser chinois

Le comportement typique de la dynamique sous influence est de répondre à des *impulsions*; celles-ci viennent en général de l'extérieur, sinon ce sont des *pulsions*, lesquelles, paraît-il, font souvent faire aux gens des choses critiquables.

Lorsqu'elle est sous l'influence d'inputs, la dynamique peut faire des choses plus athlétiques que la dynamique libre. Par exemple, elle peut utiliser des foncteurs pour faire des extensions non-linéaires, ou même, stimulée par une séquence de petites impulsions de Dirac, à défaut de déclics de MANARA, elle peut en faire des convolutions...

Ces réponses aux influences sont engendrées via des opérateurs. Ceux-ci font ce qu'on leur dit de faire tant qu'ils sont symboliques, même un peu snobs comme les hamiltoniens et leur élégante compagnie, ou réels, physiquement réalisables, comme les catalyseurs et les compresseurs adiabatiques.

À un niveau de complexité élevé sur d'autres facteurs que l'algébrique, tel celui des EAH, les opérateurs disposent de degrés de liberté et peuvent par exemple avoir des *comportements imprévisibles*. Alors leur verbe se fait chair: ils prennent forme humaine et deviennent des *agents*, et les changements sous leur influence ne sont plus totalement maîtrisés. L'objet peut alors engendrer une trajectoire chaotique ou à tout le moins non-finalisée.

Mais la gestion (et la fiscalité) est justement là pour prendre les rênes de cette "évolution" de l'EAH, bien que cela ait donné des pellicules de définir et constater celle-ci. À cette fin, la gestion doit s'enrichir de l'exposé «La Dynamique sous contrôle», et en produire le prodigieux humanoïde de gestion: le **Κψβερνετεσ.**