Les infoirés
de
Thermidor
L

L'INFORMATION ET SA THERMODYNAMIQUE

A Florence, l'église de la Santa Croce accueille le visiteur en lui présentant quatre tombeaux: Galilée d'abord et, en face, Dante Alighieri, Michel-Ange et Machiavel. C'est le grand quatuor de l'information: Galilée décrit le ciel, Dante raconte l'enfer, Michel-Ange exprime le corps des hommes et Machiavel dévoile leurs politiques.

Ainsi les messages figurent sur bien des supports. L'espoir d'un coeur est transporté par un bouquet de fleurs, un signal d'accessibilité flotte sur un parfum, une amitié est rendue contagieuse par une poignée de main, tandis que la promesse de meurtre est la crête rouge d'un coq vaudou clouée sur la porte.

Mais les messages d'amour sont le plus émouvants, surtout ceux qui sont gravés pour toujours sur les épigraphes, les plaquettes de marbre scellées sur la tombe des chers disparus dont le notaire a confirmé la disparition. Il y est rarement écrit "tiens bon j'arrive!", mais que de coeurs épanchés sur la pierre! "A mon époux chéri" – "Je serai toujours près de toi" – "À ma compagne adorée" – "Regrets éternels"...

Rêveur dans les vertes allées, on ressent combien ces messages réchauffent le marbre froid de leur sincérité. C'est là, sous la cruauté des croix, qu'ils concentrent les signaux vers l'au-delà, chargés d'une néguentropie éplorée, tandis que sous leur rampe de lancement l'entropie fait inexorablement son devoir de dégradation de l'énergie, de diffusion du corps en des particules de plus en plus fines...

Thermidor est le mois de la thermodynamique et des fleurs; il donne son arôme à l'entropie, le rapport de l'effluve de la chaleur à son intensité. C'est ainsi qu'il crée l'odeur de sainteté.

Et dans l'odeur des fleurs
qui bientôt s'éteindra
Je sais que j'aurai peur
une dernière fois.

Jacques BREL, «Mon dernier repas»

L'INFORMATION ET SA THERMODYNAMIQUE

Sommaire

1 L’information qui ne veut rien dire

1.1 Les champs d'incertitude et leurs variations

Un champ d'incertitude est un ensemble de relations entre des états potentiels situés dans un espace de probabilité ou de crédibilité. La théorie mathématique de l'information suppose que le montant d'information communiquée par un émetteur à un récepteur est lié à la variation d'incertitude produite par des variations de probabilités dans un champ d’incertitude. Plus récemment s'est développée l'approche des degrés de croyance dans un espace de crédibilité, approche dont on ne parlera qu’à la section 6.

En science de gestion (oh, pardon !), le schéma de l’analyse de décision présente trois espaces probabilistes, associés respectivement :

- Aux événements possibles, ou aux contextes aléatoires appelés "états potentiels" ;
- Aux lignes d'actions disponibles ;
- Aux conséquences résultant de l'interaction des deux premiers.

Ceci implique 3 champs d'incertitude qui ne sont d'ailleurs pas indépendants. Les mesures d’information associées au processus de communication sont classées en deux groupes :

- Celles qui sont seulement orientées vers la connaissance du système de communication et des champs d'incertitude des événements du preneur de décision ; on pourrait qualifier cet aspect de physique plutôt qu’économique ;
- Celles qui font intervenir la notion de valeur, et par suite sont liées directement à une situation d'intention, ou, de façon équivalente, l’information en relation avec une téléonomie. Cet aspect relève évidemment plus de la gestion.

Seul le premier champ est concerné par la théorie des communications et de l'information, laquelle développe des mesures construites sur des répartitions et variations de probabilités. Depuis HARTLEY [1928 ; les références, plus nombreuses, sont cette fois en fin d’exposé], puis surtout SHANNON & WEAVER [1949] ainsi que BRILLOUIN [1950], la plupart des auteurs qui présentent l'information en ces termes mathématiques se concentrent sur le montant d'information qui peut être communiqué plutôt que sur le montant qui est réellement communiqué.

Ce montant d'information qui peut être communiqué est une contribution quantitative à la valeur du réseau d'information indépendamment de la signification des messages transmis par le système, ce qui a même conduit à se demander si le terme "information" était bien adéquat pour ce contexte. Quoiqu’il en soit, ces mesures s’adressent donc bien à l’information sans contenu, c’est-à-dire..."qui ne veut rien dire". On y trouvera les notions de message direct, qui signale qu’un événement est arrivé avec une probabilité 1, et de message indirect, qui fait varier une probabilité a priori mais sans conduire à une certitude.

Les mesures liées directement à une situation d'intention (et donc une téléonomie) relèvent par contre plutôt de la théorie des décisions et sont présentées dans le Tome Sud avec le support d’un processus bayesien de gestion. C’est là que vient l’expression "pré-postérieur", qui signifie littéralement "juste devant l’arrière-train", mais pas le slip absent de la statue du

David de Michel-Ange, qui prouve à Florence aussi l’éblouissante pédérasticité du sculpteur, concurrencée par celle Léonard de Vinci et de Laurent le Magnifique. Mais il vaut mieux, au lieu de... nostalgésir, dire que "pré-postérieur" qualifie "une attitude a priori anticipant les états potentiels résultant de l’usage d’information sur des événements se réalisant a posteriori".

1.2 Mesures d’information associées au champ des événements

La typologie des mesures d’information proposée ici est conforme au rite systémique, à savoir qu’elle considère l’état, le processus et la dynamique :

- Mesures de l'état informatif du preneur de décision, donc du champ d'incertitude :
    - Avant le message, l'entropie H inconditionnelle, dite a priori ;
    - Après le message, l'entropie conditionnelle : dite a posteriori.
- Mesures de la variation de cet état d’information :
    - Contenu en information d'un message ;
    - Quantité d'information contenue dans un message ;
    - Gain (ou perte) en information du message.
- Mesures d’information de type pré-postérieur :
    - Espérance de gain d'information ;
    - Espérance d'information mutuelle.

1.3 L’infotropie et ses mesures

1.3.1 L’entropie discrète

Les mesures d’incertitude et d’information peuvent être construites à partir d’une expérience aléatoire binaire, c’est-à-dire décrivant le fait qu’un événement A peut avoir lieu ou ne pas avoir lieu : il n’y a donc que deux issues possibles. Soit P {A} la probabilité a priori de réalisation de A dans le chef du "client" de l’information (disons un récepteur, un décideur). Le montant d’information contenu dans un message signalant que l’événement A s’est réalisé (la probabilité associée à cet événement devient donc égale à 1) est une fonction monotone croissante de l’écart entre P {A} et 1.

Cette fonction, proposée par SHANNON, est $l_g(1/P)$, où l_g sera écrit pour le logarithme en base 2. Ce montant d’information peut représenter l’effet de surprise du client qui apprend la réalisation de l’événement. Cette surprise est d’autant plus grande que sa probabilité a priori P était faible, donc que 1/P était plus élevée.

Plus généralement, soit une expérience aléatoire α dont les k issues sont exclusives et exhaustives, et forment donc la liste $A_1, \ldots, A_k$, et soit $P\{A_i\}$ la probabilité associée à l’issue A_i. Il est clair dès lors que :

$$\Sigma_i P\{A_i\} = 1$$

Chaque issue possible A_i contribue à l'incertitude à concurrence de $1/P_i$, et a une probabilité d'occurrence de P_i. Dès lors, l'espérance mathématique de l'incertitude contenue dans cette situation aléatoire α peut s'exprimer par (en logarithme de base 2, écrit l_g):

$$H(\alpha) = \Sigma_i P\{A_i\} l_g[1/P\{A_i\}]$$

Cette grandeur est l'entropie (discrète) de cette expérience. Elle mesure l'espérance mathématique de l'information contenue dans un message qui signalerait au client qu'une de ces issues s'est réalisée.

Ses propriétés le plus utiles sont les suivantes:

- L'entropie (discrète) est maximale si toutes les probabilités sont égales, donc que la diffusion des événements dans l'espace probabiliste est maximale, disons comme celle des molécules d'un gaz parfait dans un milieu clos;
- L'entropie tend vers 0 si la probabilité d'une des issues tend vers 1 (devient "certaine"), les autres devenant nulles;
- Elle est dès lors croissante avec le nombre n d'issues (il y a plus de possibilités) et avec la diffusion (les issues sont plus équiprobables). C'est ce nombre n d'issues qui correspondra au nombre d'états potentiels d'un système dans la version thermodynamique, source de cette théorie. On met déjà cela dans un coin de la mémoire du Lecteur, car cela explicitera bien des choses à partir de la section 3.

L'intervalle est donc:

$$0 \leq H(\alpha) \leq l_g(n)$$

1.3.2 L'apport d'information d'une expérience auxiliaire

Soit une autre expérience aléatoire β de m issues $B_1, \ldots, B_m$, exclusives et exhaustives, et qui serait appelée à la rescousse pour "s'informer" sur α. L'idée est qu'un message concernant β modifierait (dans le chef du client de l'information) les probabilités associées aux réalisations A_i. Il va de soi que plus la répartition des probabilités de α s'en trouve modifiée, plus on admettra que β est "informative". Aux limites:

- β détermine complètement α (une des probabilités $P\{A_i\}$ devient 1);
- Ou β ne change rien, auquel cas il n'y a pas de gain en information.

Il faut donc s'intéresser à l'entropie de α compte tenu de l'information issue de β, c'est-à-dire l'entropie de α conditionnelle aux issues de β.

Si le message nous annonce "B_j", cette entropie conditionnelle sera:

$$H(\alpha|B_j)=-P\{A_1|B_j\} l_gP\{A_1|B_j\}-P\{A_2|B_j\}l_gP\{A_2|B_j\}-\ldots-P\{A_n|B_j\} l_gP\{A_n|B_j\}$$

D'une façon plus générale, pour l'ensemble des issues de β, on aura:

$$H(\alpha|\beta) = P\{B_1\} H(\alpha|B_1) + \ldots + P\{B_m\} H(\alpha|B_m)$$

Ceci implique que:

$$H(\alpha|\beta) \leq H(\alpha)$$

En effet, le fait d’être informé sur α par la voie de β ne peut augmenter l'incertitude de α. Ceci peut être éclairé par l’expression des deux cas-limite :

- α et β sont indépendants; alors :

  $$H(\alpha|\beta) = H(\alpha)$$

- β détermine complètement α ; alors :

  $$H(\alpha|\beta) = 0$$

Cette égalité dit que l’incertitude sur α est inchangée (et même annihilée dans le deuxième cas) par le fait d’être informé sur β.

Il ressort de ces relations la notion de montant moyen d’information relative à α contenue dans l’expérience β :

$$G(\beta,\alpha) = H(\alpha) - H(\alpha|\beta)$$

L’entropie conditionnelle $H(\alpha|\beta)$ peut aussi s’écrire comme la jointe moins la marginale :

$$H(\alpha|\beta) = H(\alpha,\beta) - H(\beta)$$

D’où il vient :

$$H(\alpha,\beta) = H(\alpha|\beta) + H(\beta)$$

L’entropie jointe, $H(\alpha,\beta)$ est, dans le cas d’expériences α et β indépendantes, égale à la somme des entropies marginales :

$$H(\alpha,\beta) = H(\alpha) + H(\beta)$$

Ceci revient à dire que si β n’informe pas sur α (et vice-versa), l’incertitude contenue dans les deux expériences n’est pas modifiée par le fait de les considérer simultanément.

D’une manière générale, on aura :

$$H(\alpha,\beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$$

Le montant moyen d’information relative à l’expérience α qui est contenu dans l’expérience β, $G(\beta, \alpha)$ ci-dessus, est opérationnel (des exemples numériques sont faciles) et a une portée significative pour la gestion de l’information. En effet, elle implique que le gestionnaire devrait trouver les messages (et leur source) qui ont le contenu le plus élevé de pertinence pour diminuer l’entropie de son champ d’incertitude. Ce sera, formellement, la source la plus efficace, ce qui est une expression possible de la performance d’un réseau d’information.

Ceci peut s’appliquer, par exemple, à la gestion d’un portefeuille boursier où un analyste, peut assigner une répartition $\{P(A_1), P(A_2), P(A_3)\}$ des probabilités a priori associées respectivement aux prévisions de "hausse", de "stagnation" et de "baisse" pour un titre donné et un horizon spécifié, ce qui forme une expérience "α". Dans ce contexte, une expérience de type β consisterait en les (mêmes) issues possibles, mais communiquées par des avis d’analystes extérieurs, tels ceux que fournissent des bureaux spécialisés et des publications financières. Cet avis peut modifier la répartition citée, et l’on peut exprimer l’efficacité de cette source par le montant moyen d’information $G(\beta,\alpha)$.

De même, dans le cas des paris sur les courses de chevaux, où les probabilités a priori sont traduites en "chances relatives" de gain (c’est-à-dire les "odds-ratios" en Anglais), on peut mesurer les efficacités des "tuyaux". De tels exemples sont repris en relation avec la thermodynamique à la section 6.

Ces mesures ne nous apprennent cependant pas si la source de β est bonne, donc si elle a "raison", en ce sens que la modification de probabilité induite s’est orientée en faveur de l’issue qui s’avérera ultérieurement être la bonne (les chevaux gagnants, les titres boursiers performants, etc.). Cela, on ne le saura que lors de la réalisation... mais on le saura ! Dès lors, ces mesures d’information donnent des indications sur la crédibilité de la source, et permettent aussi de comparer, du point de vue des probabilités de réalisation, des sources d’information différentes.

1.3.3 Le gain en information et l’énergie

Le gain (ou perte) en information concerne un message dit "imparfait". Ce terme qualifiera dans cet exposé un message qui n’apprend pas quelle issue d’une expérience α s’est effectivement réalisée (auquel cas le message serait "parfait"), mais qui transforme les probabilités a priori p_i associées aux issues de α en des probabilités a posteriori q_i.

C’est donc une information qui apporte de l’énergie, puisqu’elle modifie une répartition. Ceci devra cependant être plus précisément exprimé, ce qui justifie que la section 3 et les suivantes soient consacrées à certaines relations avec la thermodynamique.

Au plus une probabilité a priori a été modifiée, au plus on reconnaît qu’il y a eu du "gain" en information ; à la limite, si cette probabilité a été modifiée jusqu’à devenir "1", l’ interprétation du gain peut être celle de la "surprise" produite par le message. Il est vrai en effet, par définition, que plus faible est la probabilité a priori de réalisation d’un événement, au plus élevée est la surprise de l’observateur qui apprend qu’il s’est réalisé. Traduit en "bits" (si le logarithme est de base 2), ce gain est, pour chaque issue d’indice i, de :

$$g(p_i : q_i) = l_g(q_i/p_i)$$

Ce nom de "gain" est donc donné au montant de la modification ; il n’est pas dit (et on ne le saura pas avant la constatation de la réalisation) que cette modification est "dans le bon sens", c’est-à-dire qu’elle ferait augmenter la probabilité de l’événement qui, in fine, parmi les candidats de la liste, se réalisera. C’est donc un apport en information, mais pas nécessairement vers le "vrai", et il peut même l’en éloigner, jusqu’à devenir de l’"intox".

La répartition des probabilités situées dans le message imparfait étant décrite par les q_i, la somme des produits de ces probabilités par les gains spécifiques à chaque issue est alors l’espérance mathématique de ces gains pour l’ensemble des n issues. Dès lors, l’Espérance de Gain en Information du message imparfait est :

$$G(p:q) = \Sigma_i\, q_i\, l_g(q_i/p_i)$$

Cette Espérance de Gain en Information ("EGI") du message imparfait peut être étendue au cas où les probabilités a priori concernent des événements joints, c’est-à-dire figurent sur un tableau rectangulaire à deux dimensions, disons les lignes d’indice i=1 à n et les colonnes d’indice j=1 à m.

Chacune des probabilités a priori s’écrit alors p_{ij}, et la nouvelle valeur de probabilité jointe est $q_{ij.}$ L’EGI se forme simplement par la double sommation :

$$G(p{:}q) = \Sigma_j\, \Sigma_i\, q_{ij}\, l_g\, (q_{ij}/p_{ij})$$

Cette grandeur a des applications des plus utiles en gestion ; parmi les exemples de la section 2 figure la confrontation de deux tableaux rectangulaires de données exprimées en parts relatives d’un total général, tels que ceux d’un budget à deux entrées de catégories à comparer à ce même tableau comportant les dépenses réalisées pour chacun des postes.

1.4 Les mesures de satisfaction d'objectifs d’information

1.4.1 Les critères concernant une ligne de communication

Les critères de satisfaction relatifs à une ligne de communication s’énoncent comme suit :

- La fiabilité de la ligne de communication (ce sera l’information mutuelle) ;
- La fiabilité de l'ensemble du système de communication (tout hormis le récepteur) ;
- L'efficacité en information des messages (COLSON & DE BRUYN, 1989) : le message est efficace (selon ces auteurs) s'il fait sortir le preneur de décision de sa région de postposition de la décision pour cause de trop grande incertitude ;
- Le comportement des sources, plus généralement celui du système de communication.

1.4.2 L’information mutuelle

Soit le Tableau 1 présentant deux distributions de probabilités liées par les relations de sommation, les totaux figurant dans les rangées marginales.

Tableau 1. Distribution bivariée

p_{11}	...	p_{1j}	...	p_{1m}	$p_{1.}$
...	...	...	...	...	...
p_{i1}	...	p_{ij}	...	p_{im}	$p_{i.}$
...	...	...	...	...	...
p_{n1}	...	p_{nj}	...	p_{nm}	$p_{n.}$
$p_{.1}$	...	$p_{.j}$	...	$p_{.m}$	$p_{..}=1$

Du point de vue de l'information, ce qui nous intéresse est la structure de dépendance entre les entrées. Les cas de dépendance sont les suivants :

- S'il y a indépendance, la structure interne du tableau est de façon univoque déterminée par ses structures marginales, puisque chacune des cellules s'obtient par le produit de deux totaux marginaux ($p_{ij} = p_{i.}\ p_{.j}$) ; il lui correspond un degré de dépendance nul ;
- Hors de ce cas extrême un tableau courant présente des cellules :
  - dont un premier ensemble peut posséder la propriété d'indépendance $p_{ij} = p_{i.}\ p_{.j}$;
  - dont un deuxième possède la propriété $p_{ij} > p_i\ p_{.j}$;
  - dont le troisième possède la propriété $p_{ij} < p_{i.}\ p_{.j}$.

Utilisant ces définitions et propriétés, on caractérise le degré d'indépendance des deux entrées dans une cellule déterminée de rang i et de colonne j par son information mutuelle :

$$h_{ij} = l_g \frac{p_{ij}}{p_{i\circ} p_{\circ j}}$$

On reconnaît le rapport de la probabilité jointe, p_{ij}, au produit des marginales, $p_{i.}$ et $p_{.j}$.

- Le premier ensemble, "indépendant", est donc constitué de cellules d'information mutuelle nulle, donc $h_{ij} = 0$. Les deux autres ensembles comprennent des cellules dont l'information mutuelle est d'autant plus grande en valeur absolue que la dépendance des deux critères est plus marquée dans cette cellule ;
- Pour le deuxième, $h_{ij} > 0$;
- Pour le troisième, $h_{ij} < 0$;

1.4.3 L'espérance d'information mutuelle

L'espérance d'information mutuelle ("EIM") est l'espérance mathématique des h_{ij}, où les poids sont donnés par l'importance des cellules dans le total général, soit :

$$I(R;E) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \mathbf{l}_g \frac{p_{ij}}{p_{i\circ} p_{\circ j}}$$

Cette formule est symétrique en i et j, de sorte que I(R;E) = I(E;R) et ne dépend donc pas du choix des entrées du tableau.

L'EIM est positive ou nulle. Elle représente l'espérance mathématique des distances à l'indépendance, et pour cette raison qu'en analyse des données elle forme la base de la distance utilisée pour l'analyse des tableaux de contingence multiples, à savoir l'analyse des correspondances.

Dans cette version de la statistique multivariée, une légère transformation amène à l'exprimer comme une distance du X^2, à laquelle les noms de GUTTMAN et de BENZÉCRI sont les plus attachés.

1.4.4 L’EIM en termes de fiabilité d’une ligne de communication

a Structure

- Soit un ensemble E de n messages envoyés ($E_1, E_2,\dots, E_i,\dots, E_n$) auxquels est associée la distribution marginale ($p_{1.},\dots, p_{i.},\dots, p_{n.}$);
- Soit R ($R_1,\dots, R_j,\dots, R_m$) l'ensemble des messages reçus à l'extrémité du canal de transmission qu'empruntent les messages envoyés, et dont la distribution marginale est ($p_{.1},\dots, p_{.j},\dots, p_{.m.}$);

L’information mutuelle aide à parler formellement de cette ligne de communication:

- Si ce canal est (parfaitement) fiable, il transmet "ce qui lui est confié, rien que ce qui lui est confié, tout ce qui lui est confié". Il y a alors une correspondance biunivoque entre messages envoyés et messages reçus;
- Si le canal n'est pas fiable, l'ensemble R des messages reçus n’est pas identique à ce qui est émis (E):
  - Si $m < n$, certains messages envoyés ne sont pas reçus;
  - Si $m > n$, certains messages reçus ne sont en fait que des perturbations engendrées par le canal;
- Un élément p_{ij} du Tableau 1 peut alors être lu comme la probabilité que le message E_i soit envoyé et que le canal transmette R_j;
- L'espérance de quantité d'information transmise par le canal est une invariante par rapport au sens de transmission du message. C'est pourquoi on lui a donné le nom d'espérance d'information mutuelle.

b Fiabilité

La fiabilité de la ligne de communication peut être exprimée en appelant l’information mutuelle. Les notations utilisées sont:

- δ_{ij} est le symbole de Kronecker, soit $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$.
- $p_{j|i}$ est la probabilité de recevoir R_j conditionnelle à l'envoi du message E_i.
- $p_{i|j}$ est la probabilité de recevoir R_i conditionnelle à l'envoi du message E_j.

Par les probabilités composées, on peut écrire les n.m relations de liaison entre les probabilités jointes p_{ij}, conditionnelles $p_{j|i}$ ou $p_{i|j}$ et marginales $p_{i.}$ et $p_{.j}$, comme suit:

$$p_{ij} = p_{i.}\, p_{.j|i} \qquad \text{et} \qquad p_{ij} = p_{.j}\, p_{i|j} \qquad \forall\ i \text{ et } j.$$

Ces écritures étant prêtes, les cas suivants peuvent être formulés.

(1) Si le canal est parfaitement fiable on a évidemment les (n*m) relations:

$$p_{j|i} = \delta_{ij} \qquad \text{et donc} \qquad p_{ij} = p_{i.}\, \delta_{ij} \qquad \forall\ i \text{ et } j$$

La valeur de I(R;E) est alors donnée par l'entropie des messages envoyés. En effet, un canal parfaitement fiable n'introduit aucune incertitude supplémentaire, et l'incertitude des messages reçus ne peut alors être différente de celle des messages envoyés).

(2) Si le canal est "totalement non fiable" il y a indépendance entre les messages envoyés et les messages reçus, ce qui se traduit par les n*m relations :

$$p_{ij} = p_{i.}\ p_{.j}\ \forall\ i \text{ et } j$$

La valeur de I(R; E) est donc nulle dans ce cas.

(3) Entre ces extrêmes de la fiabilité les égalités sont remplacées par des inégalités :

- Lorsque $p_{ij} > p_{i.}\ p_{.j}$, la probabilité de recevoir R_j conditionnelle à l'envoi E_i est supérieure à la probabilité inconditionnelle de recevoir R_j. Donc ($p_{j|i} > p_{.j}$) ;
- Lorsque $p_{ij} < p_{i.}\ p_{.j}$, la conclusion inverse s'impose.

D’une manière générale, I(R;E) fournit la mesure dans laquelle connaître l’issue d’une des deux expériences marginales réduit l’incertitude quant aux issues de l’autre expérience marginale. Cette réduction d’incertitude est une fonction croissante du degré de dépendance entre les deux expériences.

2 Exploitations de mesures d’information en gestion

2.1 La panoplie

Le montant d'information, l'entropie, le gain en information et son espérance, l'entropie conditionnelle et conjointe, l'information mutuelle et son espérance mathématique, sont avant tout des mesures construites et valides dans le contexte formel des communications. Leur formulation permet cependant des applications utiles en gestion et ce, principalement en analyse des proportions dans des tableaux de données rectangulaires. En effet, l’espérance d'information mutuelle (EIM) est une bonne mesure synthétique du degré de dépendance des deux critères de classification et est pertinentes pour la comparaison de proportions relatives de tableaux différents.

Les références suivantes (précisées à la fin de l’exposé) en donnent des exemples :

- Des budgets (G. COLSON, 1973 a, qui cite B. LEV) ;
- Des tableaux input-output (COLSON & BRACHWITZ, avec Chr. DE BRUYN, 1973) ;
- Des prévisions croisées à confronter à leurs réalisations (Chr. DE BRUYN, 1975);
- L'agrégation d'états financiers (G. COLSON, 1973, citant B. LEV);
- La construction d'indices économiques comme celui des prix à la consommation, et en général les contributions de H. THEIL (depuis Economics and Information Theory, North Holland, 1967) ;
- L'exploitation de ces mesures donnant une optique opérationnelle à la gestion spéculative (Chr. DE BRUYN, 1970, COLSON et DE BRUYN 1973, 1989). Il s’agit là d’un vrai "système" autonome de gestion de portefeuille, disposant d’équipements modernes et d’un personnel de haut niveau. A ne pas manquer.

Enfin, on dit en psychométrie que le temps de réaction d’un organisme est approximativement proportionnel à l'incertitude du signal, c'est-à-dire à l'entropie H(α) de SHANNON. Partant de là, on pourrait être tenté par une analogie, mais dont la vérification paraît malaisée, selon laquelle un EAH, considéré d’un point de vue organiciste, aurait des facultés d'adaptation à des événements nouveaux ou à une évolution de l'environnement qui seraient liées aux propriétés de gain en information de ses expériences.

De telles considérations, impliquant l'auto-organisation, sont de trop haut niveau. Pour l’heure, on sera certes ravis de recevoir quelques modestes exemples où les mesures d’information élémentaires peuvent rendre des services, dont les plus courants sont:

- Montrer les montants d’information à acquérir pour élucider une incertitude décrite par une répartition discrète et exhaustive de probabilités;
- Montrer les différences de parts relatives, notamment par rapport à des totaux variants, ce qui, déjà pour de faibles dimensions, est énervant sans la disponibilité d’un instrument puissant.

Ici, deux séries de telles contributions (simples) seront présentées dans le but de se rendre compte des possibilités offertes par ces mesures et prendre un peu d’aisance vis-à-vis de leur lecture et de leur interprétation:

- Des procédures pour élucider le montant d’incertitude associée à des situations à possibilités multiples: ce sera la première partie, présentée sous la forme d’une liste de problèmes (résolus, espère-t-on), et qui doit aider à se faire la main, à développer une intelligence subtile de l’acquisition d’information, de sa mesure et de sa performance.

  Ces petits problèmes donnent aussi un "feeling" des indicateurs exprimés en bits d’information, et notamment de leur ordre de grandeur, lequel n’est en général pas familier, d’autant plus que les différences sont souvent très faibles, surtout pour les grands tableaux;
- Des procédures aidant à l’analyse et à la comparaison hâtive de tableaux de données, notamment ceux qui décrivent des quantités ou des valeurs selon plusieurs entrées, comme les budgets, les répartitions du personnel, les états financiers.
- Un tableau général reprenant les mesures les plus utilisées, mais rendu explicite par leurs correspondances avec un tableau à deux entrées, telle qu’une rencontre offre-demande, ou un tableau input-output économique.

La première vague est donc de familiarisation; pour donner une illusion didactique, l’exposé passe sur le mode questions-réponses, comme le veut la bonne école.

2.2 L’incertitude et l’acquisition d’information

2.2.1 Problème 1: Le dé à six faces

a. Quelle est en bits, en nits et en dits (et en shits?), l’entropie de l’expérience α d’un seul jet de dé normal à six faces [1, 2, 3, 4, 5, 6];

b. Quelle est l’incertitude associée à l’issue: "la face 3"?

Réponse 1 : Le dé à six faces

a. Le Tableau 2 donne les issues de α et les probabilités associées.

Tableau 2. Probabilités du jet de dé simple

Issues	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
Probabilités	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

L'incertitude moyenne de cette expérience est :

$$H(\alpha) = \sum_{i=1}^{6} H(A_i) = -\sum_{i=1}^{6} p(A_i) l_g p(A_i) = \mathbf{l}_g 6$$

b. L'incertitude moyenne est ici la même que celle apportée par chacune des issues puisque celles-ci sont équi-vraisemblables. C'est donc aussi le montant d'information d'un message signalant l'issue de la face 3 par exemple.

Dès lors, $H(\alpha) = - l_g 1/6 = l_g 6$ = 2,585 bits = 1,7921 nits = 0, 77815 dits (en base 10).

2.2.2 Problème 2 : Les deux urnes de 20 candidats

Les élections se font par deux urnes contenant chacune 20 candidats politiques : la première contient 10 candidats bleus (B), 5 noirs (N), et 5 rouges (R) ; la seconde contient 8 B, 8 N et 4 R. On tire un candidat de chaque urne. Quelle est l'expérience dont il convient de considérer l'issue comme la plus incertaine ? Le Tableau 3 donne les probabilités associées à ces deux élections.

Tableau 3. Répartition dans les deux urnes

Issues	P{B}	P{N}	P{R}
Expérience 1	0,50	0,25	0,25
Expérience 2	0,40	0,40	0,20

Réponse 2 : Les deux urnes

L’entropie de l’expérience [0,5; 0,25; 0,25] est de 0,4515 bits ; celle de la deuxième, de répartition [0,4; 0,4; 0,2] est de 0,4581 bits, ce qui la rend plus incertaine. On notera la faible différence entre ces deux cas.

2.2.3 Problème 3 : La météo

On peut soit skier la semaine du 15 décembre – mais seulement s’il neige – soit réserver un tennis la semaine du 15 août – mais seulement s’il ne pleut pas. Quel est le meilleur choix d’activité, à savoir celui des semaines citées pour lequel le temps est le moins compromis ? Les fréquences météorologiques observées figurent au Tableau 4.

Tableau 4. Météo : données et entropies

Ski (Décembre)		Tennis (août)	
S-Pluie	0,10	T-Pleut	0,40
S-Neige	0,60	T-Pleut pas	0,60
S-Couvert	0,10		
S-Soleil	0,20		
Entropie :	1,5710 bits	Entropie :	0,9710 bits

Réponse 3 : La météo

Le Tableau 4 des données a déjà été enrichi de l’entropie des deux situations. Ceci montre que, alors que la probabilité (0,6) de succès est la même dans les deux cas, la multiplicité des issues donne une incertitude plus élevée pour le ski. En fait, les issues autres que la neige sont "non-pertinentes" pour l’aide à la décision, mais sont pertinentes du point de vue de la répartition des possibilités climatiques.

2.2.4 Problème 4 : Le test du bouchon

Dans les Côtes de Castillon, deux bouteilles de vin sur 100 en général sont atteintes d’une cruelle affection, dite du bouchon. Pour les reconnaître avant la distribution, on effectue le test de la percée, dont le résultat est toujours positif quand la première goulée est atteinte du défaut, mais est aussi souvent négatif que positif quand la bouteille est indemne.

Quel est l’apport de ce test ?

Réponse 4 : Le bouchon

Soit β l'expérience de l'affection (B_1) ou non (B_2) de bouchon. L'incertitude associée est donnée par son entropie de -0,98 l_g0,098 - 0,02 l_g0,02, soit H(β)=0,1414 bits. Cette entropie est faible car la distribution est effectivement très dissymétrique.

Le montant d'information d'une issue A_i de l'expérience α (les tests) est H(β) -H(β|A_i).

L'espérance d'information apportée par l'expérience α est la somme de ces montants pondérés par les probabilités de les obtenir, c'est-à-dire :

$$G(\alpha:\beta) = H(\beta) - H(\beta|\alpha)$$

Ici, α n'a que deux issues, respectivement A_1 et A_2. Pour obtenir P {A_1} et P {A_2}, il convient de faire appel à la "formule" de Bayes, écrite ci-dessous pour une issue B_j :

$$P\{B_j|A_i\} = \frac{P\{B_j\} \cdot P\{A_i|B_j\}}{P\{A_i\}}$$

La probabilité marginale P {A_i} est Σ_j P {B_j} P {$A_i|B_j$}, soit ici :

$$P\{A_1\} = P\{B_1\}\ P\{A_1|B_1\} + P\{B_2\}\ P\{A_1|B_2\} = 0{,}02*1{,}00 + 0{,}98*0{,}50 = 0{,}51$$

$$P\{A_2\} = P\{B_1\}\ P\{A_2|B_1\} + P\{B_2\}\ P\{A_2|B_2\} = 0{,}02*0{,}00 + 0{,}98*0{,}50 = 0{,}49$$

Dès lors,

$$P\{B_1|A_1)\} = 0{,}02*1{,}00/0{,}51 = 0{,}0392$$

$$P\{B_1|A_2\} = 0{,}02*0{,}00/0{,}49 = 0{,}00$$

$$P\{B_2|A_1\} = 0{,}98*0{,}50/0{,}51 = 0{,}9608$$

$$P\{B_2|A_2\} = 0{,}98*0{,}50/0{,}49 = 1{,}00$$

En passant, on obtient de la sorte la solution "probabiliste" du problème : c'est toujours cela de pris.

À présent, les entropies conditionnelles sont :

$$H(\beta|A_1) = 0{,}0392*\ l_g 0{,}0392 + 0{,}9608\ l_g 0{,}9608 = 0{,}2386 \text{ bits}$$

H(β|A_2) = 0 puisque dans ce cas le test est déterminant.

Au total,

$$H(\beta|\alpha) = 0{,}51\ H(\beta|A_1) + 0{,}49\ H(\beta|A_2) = 0{,}1217 \text{ bits}$$

La réduction d'incertitude (l'espérance de montant d'information apportée par l'expérience α) est dans ce cas :

$$G(\alpha:\beta) = 0{,}1414 \text{ bits} - 0{,}1217 \text{ bits} = 0{,}0197 \text{ bits.}$$

On notera la faible performance du test, manifestement inadéquat pour les bonnes bouteilles. Rien ne vaut d'y tremper les doigts soi-même.

2.2.5 Problème 5 : L'entropie conditionnelle et le cancer

Chez les adultes d'une région, il y a 100 cancéreux dont 60 fumeurs. Un recensement antérieur a montré qu'une personne sur 5 ne fume pas dans cette région. Lorsqu'on isole une personne au hasard, elle peut être fumeuse ou non, cancéreuse ou non.

a. Quelle est le montant d'information apporté par le fait de savoir si Dupont, habitant cette région,
   - est fumeur ou non ;
   - est cancéreux ou non.

b. Quelle est la quantité d'information apportée par "le fait de savoir si Dupont est fumeur ou non" à propos d'un cancer possible de Dupont ?

Réponse 5 : Fumeur-cancer

Soit β l'expérience "cancéreux ou non", et l'expérience α le fait d'être fumeur ou non (expérience auxiliaire). Le Tableau 5 en donne les probabilités jointes et marginales.

Tableau 5. Expériences α (fumeur) et β (cancer)

α	Cancer	Non-cancer	Sommes
Fumeur	0,150	0,065	0,215
Non-fumeur	0,025	0,760	0,785
Sommes	0,175	0,825	1

Les compositions probabilistes et d'information pertinentes sont les suivantes.

$P\{C\|F\} = 0{,}6977$	$P\{NC\|F\} = 0{,}3023$
$P\{C\|NF\} = 0{,}0318$	$P\{NC\|NF\} = 0{,}9682$
$H(\beta) = 0{,}6690$ bits	$H(\alpha) = 0{,}7509$ bits
$H(\beta\|\alpha) = 0{,}3499$ bits	$H(\beta\|F) = 0{,}8841$ bits
$G(\alpha : \beta) = 0{,}3191$ bits	
$G(F : \beta) = -0{,}2151$ bits	
$G(NF : \beta) = 0{,}4654$ bits	

On constate que l'entropie $H(\alpha)$ de "Fumeur ou non" est peu différente de celle $H(\beta)$ de "Cancer ou non" ; effectivement, les dispersions exprimées en pourcentages sont peu éloignées (17,5% de C et 21,5% de F). Ce cas montre que, l'entropie étant une mesure symétrique, elle ne renseigne pas sur les dominances dans un sens ou dans l'autre.

L'analyse statistique classique du tableau de contingence donne les résultats suivants:

	Colonne 1	Colonne 2	Totaux
Pourcent du total, ligne 1	15,0%	6,5%	21,5%
Pourcent du total, ligne 2	2,5%	76,0%	78,5%
Pourcent du total	17,5%	82,5%	1,000
Chi-square (dl=1)	518,250	p=0,000	

Ce test statistique élémentaire concorde pour rejeter clairement l'indépendance, mais il ne donne aucune indication sur l'information mutuelle. En effet, comme il y a dépendance, une expérience doit en moyenne apporter une information sur l'autre, c'est-à-dire réduire son incertitude; cependant, certaines issues de la première expérience peuvent accroître l'incertitude régnant sur la seconde.

L'entropie conditionnelle est nécessairement moindre que celle de $H(\beta)$. Ici, comme $H(\beta) = 0{,}6690$ bits, et $H(\beta|\alpha) = 0{,}3499$ bits, il y a effectivement une espérance de gain positive en information en moyenne, à savoir $G(\alpha:\beta) = 0{,}3191$ bits.

Ce gain est cependant très inégal. En effet, apprendre que Dupont ne fume pas rend la détermination de son cancer plus incertaine; cela se voit par le fait que la distribution conditionnelle $P\{\beta|F\}$ est plus symétrique – donc d'entropie plus élevée (0,8841) – que la distribution marginale $P\{\beta\}$, d'entropie $H(\beta) = 0{,}6690$ bits. De ce fait, le renseignement "F" donne un gain en information négatif.

2.2.6 Problème 8: La pétasse et le Belge

On sait que les habitants du village d'Anguille-sous-Roche (disons X) disent toujours la vérité, tandis que les habitants du village voisin, Rubis-sur l'Ongle (Y) mentent toujours. Une touriste M sait qu'elle se trouve dans l'un des deux, mais elle ne sait pas lequel. En interrogeant un Belge du coin, cette pétasse doit:

- Déterminer dans quelle village elle se trouve;
- Déterminer où vit son interlocuteur.

Les habitants de X peuvent aller en Y et vice-versa. On fera les hypothèses qu'il est équiprobable que M soit dans X ou Y et que le passant vive dans X ou dans Y. Quel est le nombre minimum de questions que M doit poser, sachant que le Belge ne répond que par ja ou par neen à toute question de M?

Réponse 8: La pétasse et le Belge

Soit l'expérience β_1: dans quelle village se trouve M? Ses issues sont égales (selon l'énoncé) à 1/2, donc l'entropie $H(\beta_1)$=1 bit.

De même, pour l'expérience β_2: "Dans quelle village se trouve l'interlocuteur?", les issues sont égales (selon l'énoncé) à 1/2, donc l'entropie $H(\beta_2)$ = 1 bit.

Pour élucider le problème, il faut donc trouver des expériences α (d'issues A_i) telles que:

$$G(\alpha:\beta) = H(\beta) - H(\beta|\alpha) = 0$$

L’espérance de gain en information d’une expérience (α) sur une autre expérience (β) ne peut être négative : on ne peut apprendre moins que rien sur une expérience β en tentant α et on ne peut pas apprendre plus sur β (par α) qu’en tentant l’expérience β elle-même. En tentant α, on ne peut donc apprendre ni moins que rien, ni plus que tout, sur β.

Dans le cas présent, il faut au minimum trouver deux fois un bit d’information, soit un strict minimum de deux questions, puisque les réponses ("oui" ou "non") ne peuvent en apporter davantage. De plus, pour qu’en deux questions (oui-non) on trouve deux bits d’information, il faut que celles-ci soient directement orientées (sur β, donc l’élucide complètement) et indépendantes. Ici, toutefois, on ne sait pas si l’interlocuteur dit la vérité, et chaque réponse ne suffit donc pas à élucider "sa" question.

Dès lors, le stratagème est de formuler une question qui donne la réponse aux deux questions à la fois, puis de poser une question qui dise si la réponse est vraie – a été ou non donnée par un menteur. Une solution valide serait :

α_1 : "Vivez-vous dans la ville où nous nous trouvons ?"

- Si "oui", M est à Anguille-sous-Roche (X). En effet, si elle est dans X :
  - Le passant issu de X répond "oui" (vérité)
  - Le passant issu de Y répond "oui" (mensonge)
- Si "non", M est à Rubis-sur-l’Ongle (Y). En effet, si elle est dans Y,
  - Le passant issu de X répond "non" (vérité)
  - Le passant issu de Y répond "non" (mensonge)

α_2 : "Toute question dont chacun des interlocuteurs connaît la vérité sans aucun doute possible", par exemple : "est-ce que j’ai deux bras?" (et pas "êtes-vous une vraie blonde ?"). La réponse (qui est sûre) à cette question permet d’élucider la précédente.

Ici, l’ordre des deux questions peut être changé sans modifier l’apport d’information, mais ce n’est pas du tout vrai pour toute procédure, et certes pas pour les procédures dites "le plus probablement la plus courte".

2.2.7 Question 7 : Le siège de Vienne

Lors du siège de Vienne par les Turcs, les défenseurs devaient déplacer leurs forces vers les portes du Nord, de l'Est, du Sud, et de l'Ouest selon l'impact des assauts; il était très important de prévoir la zone d'impact pour renforcer la défense. Les fréquences relatives des prévisions et réalisations étaient celles du Tableau 6.

Les questions posées sont :

a. Quelle était la date du siège de Vienne? Quelle fut la première grande victoire des Autrichiens sur les Turcs ?

b. S'estimant lésés et sous-équipés, les sudistes demandent au général de comparer les montants d’information des prévisions par rapport au réalisations "Nord" et "Sud";

Tableau 6. Le siège de Vienne

Prévisions	Réalisations			
	Nord	Sud	Est	Ouest
Nord	0,20	0,05	0,06	0,04
Sud	0,06	0,12	0,01	0,01
Est	0,24	0,01	0,01	0,04
Ouest	0,05	0,02	0,02	0,06

Réponse 7 Le siège de Vienne

a. Les Turcs ont assiégé Vienne deux fois : en 1529 et 1683. Une victoire importante des Autrichiens eut lieu à Lépante, en mer de Grèce, en 1579, avec l'aide de la flotte grecque. La solution exacte à ce problème du siège n'a rien à voir avec cette question, qui est un non-sens historique. Elle a en effet été trouvée par la cavalerie polonaise de SOBIESKI, laquelle a foncé sur les forces turques dans leur camp et les a décimées avant qu'elles aient fini leurs croissants.

b. On constitue d'abord le tableau joint (le 7) en y présentant les probabilités marginales :

Tableau 7. "Probabilités" des prévisions-réalisations à Vienne

Prévisions	Réalisations				
	Nord	Sud	Est	Ouest	Sommes
Nord	0,20	0,05	0,06	0,04	0,35
Sud	0,06	0,12	0,01	0,01	0,20
Est	0,24	0,01	0,01	0,04	0,30
Ouest	0,05	0,02	0,02	0,06	0,15
Sommes	0,55	0,20	0,10	0,15	1,00

Soient p et q désignant respectivement les probabilités a priori et a posteriori.

L'information contenue dans la prévision Nord effectivement réalisée par rapport à l'indépendance (qui est le produit des marginales) vaut (en logarithme de base 2) :

$$\mathbf{lg}\frac{p_{ij}}{p_i \cdot q_j} = \mathbf{lg}\frac{0,20}{0,55 \cdot 0,35} = 0,0551 \quad \text{bits}$$

L'information contenue dans la prévision Sud effectivement réalisée vaut :

$$\mathbf{lg}\frac{p_{ij}}{p_i \cdot q_j} = \mathbf{lg}\frac{0,12}{0,20 \cdot 0,30} = 1,5850 \quad \text{bits}$$

L'espérance de contenu en information, pour Nord par exemple, est la probabilité que Nord se réalise multipliée par l'espérance des informations contenues dans les prévisions (N, S, E, O) faites alors que Nord se réalise, soit :

$$\frac{1}{0,55}\left[0,20 \cdot \mathbf{lg}\frac{0,20}{0,55 \cdot 0,35} + 0,06 \cdot \mathbf{lg}\frac{0,06}{0,55 \cdot 0,20} + 0,24 \cdot \mathbf{lg}\frac{0,24}{0,55 \cdot 30} + 0,05 \cdot \mathbf{lg}\frac{0,05}{0,55 \cdot 0,15}\right]$$

Ce résultat donne 0,0949 bits. Dans le cas de Sud, cette espérance s'obtient par :

$$\frac{1}{0,20}\left[0,05 \cdot \mathbf{lg}\frac{0,05}{0,20 \cdot 0,35} + 0,12 \cdot \mathbf{lg}\frac{0,12}{0,20 \cdot 0,20} + 0,01 \cdot \mathbf{lg}\frac{0,01}{0,20 \cdot 30} + 0,02 \cdot \mathbf{lg}\frac{0,02}{0,20 \cdot 0,15}\right]$$

Soit 0,6419 bits. Les prévisions Sud apportent donc une contribution à l'information par rapport à l'indépendance beaucoup plus significative que celles de Nord.

2.2.8 Problème 10 : Les agents boursiers

Les titres boursiers T1 et T2 sont suivis par deux agents boursiers, X et Y. Leurs performances à ce jour sont caricaturées par le Tableau 8 en présentant des fréquences.

Tableau 8. Confrontation des agents boursiers

	Agent A			Agent B		
		Réalisation			Réalisation	
Titre 1	Prévision	Augment.	Dimin.	Prévision	Augment.	Dimin.
	Augment.	0,02	0,44	Augment.	0,30	0,30
	Dimin.	0,50	0,04	Dimin.	0,20	0,20
Titre 2	Augment.	0,40	0,10	Augment.	0,30	0,20
	Dimin.	0,10	0,40	Dimin.	0,10	0,40

La comparaison des gains en information est faite au Tableau 9. Celui-ci donne les logarithmes des rapports entre les fréquences jointes (p_{ij}) situées sur la diagonale principale et le produit des marginales ($p_{i.}*p_{.j}$), où i est l'entrée ligne (celle des prévisions) et j l'entrée colonne (réalisations) :

Tableau 9. Gains en information des agents boursiers

Titres	Agent A			Agent B		
	Augment.	Dimin.	Somme	Augment.	Dimin.	Somme
Titre 1	-3,5801	-2,6960	-6,2761	0,0000	0,0000	0,0000
Titre 2	0,6781	0,6781	1,3561	0,5850	0,4150	1,0000
Somme:	-2,9021	-2.0179	-4,9200	0,5850	0,4150	1,0000

- Pour le titre 1,
  - l'agent X n'a pas toutes ses tartines ; le gain négatif indique une forte inversion des conclusions ;
  - l'agent Y est neutre, en ce sens que ses résultats sont équivalents à ceux d'une répartition de prévision au hasard.
- Pour le titre 2, l'agent X est un peu meilleur que Y ;

Globalement, Y est moins mauvais que X et, s'il faut ne choisir qu'un agent, ce serait Y si le titre 2 n'a pas une valeur largement supérieure à celle du titre 1. Le Tableau 10 donne ensuite les espérances de montants d'information.

Tableau 10. Espérances de montants d'information des agents

Titres	Agent A			Agent B		
	Augment.	Dimin.	Somme	Augment.	Dimin.	Somme
Titre 1	0,6627	0,6872	0,3499	0,0000	0,0000	0,0000
Titre 2	0,2781	0,2781	0,5561	0,1887	0,1887	0,2704
Sommes:	0,9407	0,9653	0,9060	0,1887	0,1887	0,2704

Le calcul de la première entrée, par exemple, est le suivant, si cela ne déraille pas :

$$0{,}6627 = [1/(0{,}02+0{,}50)] * [0{,}02.l_g(0{,}02/(0{,}52*0{,}46)) + 0{,}50.l_g(0{,}50/(0{,}52*0{,}54))$$

On devrait donc choisir l’agent X en prenant le contre-pied de ses conseils pour le titre 1 et en suivant ses conseils pour le titre 2. Cela assurerait un gain d'information de 3,3972 bits, mais il faudrait encore mieux acheter un potager ou un terrain boisé.

2.3 Application de mesures d’information à la gestion de comptes

2.3.1 Les domaines privilégiés

La contribution des mesures issues de la théorie de l’information à la gestion des comptes est pratiquement limitée aux rapports et confrontations de parts relatives (d’un total), en assimilant celles-ci aux probabilités de réalisation des grandeurs selon la masse relative qu’elles représentent dans l’univers pseudo-aléatoire, la masse totale étant bien sûr l’unité.

De la sorte, les domaines privilégiés en sont l’agrégation de grandeurs (en fonction de la perte d’information), les comparaisons de budgets (ou de prévisions) aux réalisations, les répartitions dans des tableaux à deux (ou même trois) entrées, telles que les croisements produits-marchés, dont des petits exemples seront présentés. Les comparaisons d’états financiers, plus copieuses et raffinées, sont confiées aux publications citées en référence.

Les renseignements fournis sont maigres : ils donnent seulement les différences relatives de répartition (et leur éventuelle projection) et ce, sans souci de cause ou de sens de la dissymétrie. Ces renseignements sont cependant précieux pour guider efficacement l’analyste et, de plus, appliquée à de grands tableaux, la méthode est... foudroyante.

2.3.2 Agrégation de postes comptables ou financiers

a Principe d’agrégation

L’agrégation de postes d’états financiers a pour vertu de regrouper des grandeurs considérées comme trop détaillées ("Au plus Chef au plus bref"), et de fournir des états structurellement équivalents (aux fins de comparaisons). Leur défaut, comme celui de toute agrégation, est par définition une perte d’information, à savoir celle qui est contenue dans la différenciation des composantes.

Une agrégation purement mathématique serait, de surcroît, aveugle quand à la pertinence des agrégats retenus et surtout quant à l’admissibilité des regroupements effectués.

L’utilisation de mesures d’information permet de bien traiter le premier point, en prenant pour critères d’agrégation la taille relative des postes concernés et leur stabilité dans le temps. La question de la pertinence des agrégats, en revanche, n’est pas objective ; elle dépend de l’opinion de l’analyste, du comptable, des souhaits de l’utilisateur. L’admissibilité des agrégations effectuées doit donc faire l’objet de tests associés à la procédure.

Le principe est que l’agrégation est d’autant plus désirable que :

- Le total des deux postes forme une plus petite fraction du total général ;
- Les montants des deux postes sont différents.

En effet, on peut montrer que la perte d’information, mesurée par la différence d’entropie avant et après l’agrégation (H-H’), et égale à l’entropie de la paire multipliée par la part relative de la paire dans le total. La procédure est alors itérative : agréger successivement les paires de minimum de perte d’information, en vérifiant à chaque fois les conditions d’admissibilité. Évidemment, dans une version programmée, on peut déjà introduire des tests de validité sur les groupements absurdes ou inadmissibles a priori, ce qui limite évidemment les issues infructueuses et allège la démarche.

En ce qui concerne la stabilité, celle-ci se manifeste par le fait que la ventilation des postes agrégés varie peu dans le temps. Cette propriété peut être surveillée en établissant une contrainte de maximum d’espérance de gain en information sur des périodes successives.

b Exemple d’agrégation

Le Tableau 11 présente des données fictives aux fins d’illustration. Le problème posé est d’élucider les préférences d’agrégation selon leurs pertes d’information (en bits).

Tableau 11. Répartition des actifs courants de six firmes en harfs ?)

Postes	A	B	C
Caisse	12500	23000	24900
Effets	12500	2000	100
À recevoir	15000	15000	15000
Stock	10000	10000	10000
Total	50000	50000	50000
Postes	D	E	F
Caisse	2500	4600	4980
Effets	2500	400	20
À recevoir	15000	15000	15000
Stock	10000	10000	10000
Total	30000	30000	30000

Les firmes du Tableau 11 ne diffèrent que par la répartition des deux premiers postes (les plus liquides) ; ceci permet de voir clairement les effets de la procédure

- La préférence à l’agrégation serait dans l’ordre C-B-A pour le groupe supérieur ;

- Ce serait F-E-D pour le groupe inférieur, en raison de l’importance relative des deux groupes concernés;
- Verticalement, toutefois, on aurait les préférences suivantes:

  $D \supset A$; $E \supset B$; $F \supset C$.

La raison en est que les montants absolus sont supérieurs dans ce deuxième groupe.

Exprimons à présent les postes en parts relatives, en détaillant le cas de la firme A:

Caisse	$0{,}25 = p_1$
Effets négociables	$0{,}25 = p_2$
À recevoir	$0{,}30 = p_3$
Stock	$0{,}20 = p_4$

- L’entropie de cette répartition vaut 1,986 bits;
- Après agrégation de "caisse" et "effets à recevoir", l’entropie vaut 1,486 bits;
- La perte d’information ("de détail") associée à cette agrégation est donc exprimée par $H\text{-}H' = p_sH_s$, où "p_s" désigne la part combinée de ces deux postes dans le total.

Le résultat de ce calcul pour les six agrégations figure au Tableau 12.

Tableau 12. Pertes d’information par agrégation (en bits)

Firmes	H	H’	p_s	H_s	p_sH_s
A	1,986	1,486	0,500	1,000	0,500
B	1,687	1,486	0,500	0,402	0,201
C	1,505	1,486	0,500	0,038	0,019
D	1,626	1,459	0,167	1,000	0,167
E	1,526	1,459	0,167	0,402	0,067
F	1,465	1,459	0,167	0,038	0,006

La grandeur p_sH_s est un indicateur de réticence vis-à-vis de l’agrégation. Cette réticence augmente quand les parts p_s sont plus importantes, ce qui se voit sur le Tableau 12; il est en effet moins désirable d’agréger un poste de dimension importante, disons X, avec un autre du même ordre qu’avec un poste plus petit, disons Y.

Cela peut se montrer arithmétiquement: si à un poste de valeur X on ajoute la grandeur Y, l’entropie de la paire H_s va croître jusqu’à ce que Y=X, car:

$$H - H' = -p_1.l_gp_1 - p_2.l_gp_2 + (p_1+p_2).l_g(p_1+p_2);$$

Cette différence croît avec p_2, ce que montre la dérivée première par rapport à p_2, qui vaut $-l_g[p_2/(p_1+p_2)]$, et est donc positive.

Ce mode d'agrégation selon les parts relatives a aussi la propriété d'additivité :

$$p_sH_s + p_tH_t = p_{s+t}\,(H_s+H_t)$$

De la sorte on peut, avec ce critère, poursuivre des agrégations (admissibles) soit en agrégeant de nouvelles paires, soit en associant de nouveaux postes à des agrégats déjà constitués. Bien entendu, cette procédure s'applique à toutes les listes de parts d'un total, par exemple les nombres d'unités vendues, le remembrement des paroisses d'un évêché selon le nombre d'ouailles etc.

Ainsi, supposons un évêché de 25 paroisses, où le manque de curés demande un remembrement. Certains regroupements peuvent être exclus pour des raisons linguistiques, d'autres pour des raisons de trop faible proximité etc. Si toutes les paroisses avaient le même nombre d'ouailles, l'entropie vaudrait l_g25, soit 4,644 bits. Si une des paroisses fait 80%, et les autres sont peu différentes, l'entropie ne serait que d'environ 1,150 bits. La faible diminution d'entropie due à l'agrégation dans un tel cas surprend les jeunes Lecteurs peu familiers des affaires ecclésiastiques. Quand un poste dominant est présent, il est normal de ramener les 25 postes à 6 ou 7 en ne perdant que 0,5% de l'entropie, c'est-à-dire ici 0,00575 bits. Une petite diminution de 5% de l'entropie, donc de 0,0575 bits – à première vue dérisoire – conduirait même à tout agréger sauf le seul gros poste (de 80%) !

2.4 Comparaisons budgétaires

2.4.1 Contribution des mesures d'information

L'objectif de la comparaison budgétaire est d'attirer l'attention sur les écarts relativement le plus prononcés entre les budgets et leurs réalisations. Les mesures de ces écarts sont les gains en information associés aux différences de répartition entre les tableaux et ce, par rapport à des totaux généraux (et des totaux marginaux) qui seront habituellement différents d'une période à l'autre. Un tel repérage par rapport à des références variables est très difficile sans instrument, mais les mesures fournies par la théorie de l'information en donnent des indications intéressantes. Elles n'en donnent bien sûr pas le sens ni la justification, ces phases étant confiées ensuite à l'analyste.

Par ailleurs, il est possible aussi de proposer un "seuil" de l'espérance de gain en information tel que la confrontation ne donne lieu à une analyse spécifique que s'il est dépassé. C'est de cette nature qu'est le rêve des "clignotants" dans les tableaux de bords chers.

Ainsi, soit la confrontation des budgets et réalisations figurant au Tableau 13 (COLSON, 1976, selon un exemple déjà initié par H. THEIL, The Accounting Review, 4, 1969), où le partitionnement est simplement effectué en départements et services. Le problème est de savoir vers quelles composantes de l'organisation il serait le plus judicieux de porter son attention, et aussi de diagnostiquer les composantes de l'organisation qui présentent les écarts les plus significatifs et ce, selon leur niveau d'agrégation.

Tableau 13. Budgets et réalisations par départements

Organisation	Budget	Réalisation
DÉPARTEMENT A	350	420
Service A1	100	120
Service A2	70	60
Service A3	40	60
Service A4	60	90
Service A5	80	90
DÉPARTEMENT B	200	210
Service B1	100	90
Service B2	60	60
Service B3	40	60
DÉPARTEMENT C	200	270
Service C1	70	90
Service C2	40	60
Service C3	50	60
Service C4	40	60
DÉPARTEMENT D	150	150
Service D1	60	60
Service D2	50	30
Service D3	40	60
DÉPARTEMENT E	100	150
Service E1	60	90
Service E2	40	60
TOTAL	1000	1200

2.4.2 Analyse au niveau des départements

Le dépassement global est de 20%. Le Tableau 14 donne les parts relatives des départements dans le total des budgets et des réalisations. Les différences de parts des départements reflètent les écarts relatifs de réalisation par rapport aux budgets. Les lignes suivantes utilisent ces grandeurs pour obtenir le gain en information par département (dont l'indice est "d"), et donc ensuite ranger ceux-ci par ordre décroissant.

Tableau 14. Budgets et réalisations par département

Départements	E	C	A	D	B	Sommes (horiz.)
Budget ("P")	0,100	0,200	0,350	0,150	0,200	1
Réalisation ("Q")	0,125	0,225	0,350	0,125	0,175	1
$l_g(Q_d / P_d)$	0,322	0,170	0,000	-0,263	-0,193	
$Q_d * l_g(Q_d / P_d)$	0,040	0,038	0,000	-0,033	-0,034	0,012

La première lecture pertinente du Tableau 14 est aidée par l'ordre (résultant) qui y est présenté. Les clefs sont les grandeurs Q_d/P_d :

- Lorsque ce rapport est supérieur à 1, son logarithme est positif; ce sera le cas pour tous les départements ayant des excès de dépenses supérieurs à la moyenne des excès;
- Il est négatif pour ceux qui ont des excès de dépenses inférieurs à la moyenne;
- Ce rapport est affecté du poids (Q_d) de la part des dépenses du département, et reflète dès lors la mesure dans laquelle cet écart affecte l'ensemble de la confrontation pour l'établissement.

La somme de ces scores sur tous les départements (ici arrondie à 0,012), donne l'espérance de gains d'information pour le budget total – lequel est donc dépassé en moyenne pondérée. On montrera plus loin que ce score est toujours inférieur pour les niveaux plus agrégés (ici les départements) que pour les composantes (les services spécifiques).

2.4.3 Analyse au niveau des services

L'analyse au niveau des services est conduite en utilisant ces mêmes mesures, soit sein d'un département – on est alors ramené au cas précédent – ou par rapport à l'ensemble. Ce dernier cas est plus intéressant, car il élucider la structure des rapports globaux.

Soit n services d'indices i; soit p_i la part du budget du i^e service dans l'ensemble, et q_i la dépense réalisée. La mesure globale dans laquelle les paires (p_i, q_i) diffèrent dans l'ensemble est donnée par:

$$q_1.l_g(q_1/p_1) + q_2.l_g(q_2/p_2) +... + q_n.l_g(q_n/p_n)$$

Pour l'exemple en cours, cette somme vaut 0,039 bits, supérieure au 0,012 de la confrontation agrégée. En effet, pour chacun des départements (ci-dessous "A") comprenant k services, il est vrai que:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{k} q_i \cdot \lg\frac{q_i}{p_i} = Q_A \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{q_i}{Q_A} \cdot \frac{q_i}{p_i} = Q_A \cdot \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{q_i}{Q_A} \cdot \lg\frac{q_i/Q_A}{p_i/P_A} + \frac{q_i}{Q_A} \cdot \lg\frac{Q_A}{P_A}\right)$$

La définition de l'espérance de gains est rappelée ci-dessous:

(2) $$G_A = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{q_i}{Q_A}\cdot \lg\frac{q_i/Q_A}{p_i/P_A}\right)$$

Elle implique que G_A est l'espérance mathématique de l'information du message qui transforme les k (ici 5) probabilités a priori p_i/P_A en les probabilités a posteriori q_i/Q_A.

Dans le cas présent, Le p_1/Q_A = (100/1000)/ (350/1000) = 0,2857 et est la mesure dans laquelle les parts des services dans les dépenses totales du département A diffèrent des parts correspondantes dans le budget du département A. Le Tableau 15 donne en exemple ces espérances de gain en information pour les départements A et B.

Tableau 15. Espérances de gain en information des parts de A et de B

Organisation		q_i/Q_d	$l_g\ (q_i/Q_d)$ / (p_i/P_d)	$q_i/Q_d.l_g\ (q_i/Q_d)/(p_i/P_d)$
DÉP. A	Service A4	0,214	0,32	0,069
	Service A3	0,143	0,32	0,046
	Service A1	0,286	0,00	0,000
	Service A5	0,214	-0,09	-0,020
	Service A2	0,143	-0,49	-0,069
DÉP. B	Service B3	0,286	0,51	0,147
	Service B2	0,286	-0,07	0,020
	Service B1	0,429	-0,22	0,045

2.4.4 Analyse interne des départements

Se rappelant que $q_1 + q_2 + ... + q_k = Q_A$ (la somme des services fait le département), l'expression (1) s'écrit:

$$Q_A.G_A + Q_A\ l_g\ Q_A/P_A$$

Le Tableau 16 donne cet l'exemple pour le département A.On obtient ici 0,026 bits.

Pour tout département d, on calculerait de même:

$$Q_d.G_d + Q_d \log Q_d/P_d$$

Le Tableau 17 donne ces résultats (G_d) par département.

Tableau 16. Parts des services du département A

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
Budget : p_i/P_A	0,286	0,200	0,114	0,171	0,229
Réalisation : q_i/Q_A	0,286	0,143	0,143	0,214	0,214

Tableau 17. Espérances de montant d'information par département

	A	B	C	D	E
G_d	0,026	0,032	0,006	0,087	0,000

On remarque que les départements E et C, qui avaient des écarts positifs les plus importants, ont en revanche des G_d faibles (0,000 et 0,006). Ceci veut dire que les services de ces départements ont excédé leur budget par des pourcentages peu différents. Un diagnostic à proposer serait alors que ces services auraient subi un phénomène commun, dépassant la capacité de maîtrise par les services spécifiques.

Dans le cas de D, où l'écart (négatif) est important, le score de 0,087 montre une forte dispersion interne, donc des performances variables selon les services. La somme peut ensuite être élaborée pour l'ensemble de tous les services :

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \cdot \lg\frac{q_i}{p_i} = \sum_{d=1}^{D} (Q_d \cdot G_d) + \sum_{d=1}^{D} Q_d \cdot \lg\frac{Q_d}{P_d}$$

Cette somme (où l'on retrouve le 0,039 bits cité plus haut) est donc formée par le gain en information "intra" département pondéré et, ensuite, l'espérance de gain "inter" département (0,012 bits) – qui lui est donc nécessairement inférieure.

2.5 Projet budgété

Soit, pour en finir avec ces petits calculs sans âme, un cas de projection. L'ULg, dans sa chevauchée dynamique vers le fabuleux destin qui l'attend (patiemment), investit dans deux facultés, comportant en tout 5 départements. Le Tableau 18 en donne le programme de dépenses pour les périodes T+j :

Tableau 18. Espérances de gain en information des parts des services

Organisation		T+1	T+2	Dépenses observées à la fin de T+1
FAC. A	Départ. A1	100	200	120
	Départ. A2	100	100	120
	Départ. A3	50	100	60
FAC. B	Départ. B1	100	400	140
	Départ. B2	150	200	160
	TOTAUX	500	1000	600

a. Soit qu'une programmation sociale non prévue a fait hausser les coûts de 20% pour l'ensemble de l'ULg. Si la même progression de dépense globale est prévue, quel serait le nouveau plan de dépenses pour T+2 ?

b. Quelle est l'information de l'analyse budgétaire pour la période T+1 ?

c. En supposant que le nouveau budget de T+2 soit scrupuleusement respecté, quel est le nouveau plan de dépenses pour T+2 ?

Réponse au projet budgété

Le Tableau 19, présente les analyses répondant aux problèmes a et c simultanément. L'indice "f" indique les facultés. On lit que les dépenses de "T+1" sont de 20% supérieures (donc 600=1,2∗500) et réparties ; la colonne de dépenses "T+2" montre une nouvelle hausse de 20%.

b. Le point b se traite en utilisant les formules d'espérance de gain en information G_f pour chaque faculté d'indice f, ici ("A" et "B"), et en faisant la somme :

$$G = G_F + \sum_{f=1}^{2} Q_f \cdot G_f = \sum_{f=1}^{2} Q_f \cdot \log\frac{Q_f}{P_f} + \sum_f Q_f \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{q_i}{Q_f} \log\frac{q_i/Q_f}{p_i/P_f} \right)$$

Ceci est donc l'espérance de gain en information pour l'ensemble des n départements (ici il y en a cinq), soit une composition directe de leur somme :

$$G = \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot \log\frac{q_i}{p_i}$$

Le Tableau 19 montre aussi que les proportions p_i/P_f et q_i/Q_f sont inchangées pour la faculté A (0,4; 0,4; 0,2) puisqu'elles n'ont subi qu'un produit par "120%" ; donc $G_f = 0$ pour f="A".

Tableau 19. Les parts des services dans les budgets et les dépenses

Orgnisation	BUDGET						DÉPENSES			
	T+1			T+2			T+1			T+2
	Bud.	p_i/P_f	p_i	Bud.	p_i/P_f	p_i	Dép.	q_i/Q_f	q_i	
A: A1	100	0,40	0,20	200	0,50	0,20	120	0,40	0,20	288
A2	100	0,40	0,20	100	0,25	0,10	120	0,40	0,20	144
A3	50	0,20	0,10	100	0,25	0,10	60	0,20	0,10	144
Tot (P et Q):	250	1,00	0,50	400	1,00	0,40	300	1,00	0,50	576
B:B1	100	0,40	0,20	400	0,66...	0,40	140	0,466	0,233	576
B2	150	0,60	0,30	200	0,33...	0,20	160	0,533	0,266	288
Tot (P et Q):	250	1,00	0,50	600	1,00	0,60	300	1,00	0,50	864
TOTAUX	500		1,00	1.200		1,00	600		1,00	1440

La faculté B, qui présente des changements significatifs, est reprise séparément au Tableau 20.

Tableau 20. Espérances de gain en information pour la faculté B

Départ. de B	p_i/P_B	q_i/Q_B	$q_i/Q_B \,.\, l_g\,(q_i/Q_B)\,/\,(p_i/P_B)$
Département B1	0,4	0,466...	0,103783 bits
Département B2	0,6	0,533...	-0,090627 bits

Au total, G_A=0, tandis que G_B= 0,000091836 bits.

Quant au gain facultaire:

$$G_F=\sum_f Q_f . l_g(Q_f/P_f),$$

il est nul puisque les variations des sommes sont proportionnelles, ce que met en évidence le Tableau 21.

Tableau 21. Gain d’information du changement proportionnel

Facultés	Q_f/P_f	$Q_f \, l_g \, (Q_f/P_f)$
Faculté A	0,5/0,5 = 1	$0{,}5 * l_g \, 0{,}5/0{,}5 = 0$ bits
Faculté B	0,5/0,5 = 1	$0{,}5 * l_g \, 0{,}5/0{,}5 = 0$ bits

Il ne reste donc que $0{,}5*0 + 0{,}5*G_B$ comme contribution totale au gain en information.

2.6 Projection structurelle d’un tableau croisé

2.6.1 Le problème posé

L’apothéose de cette exploitation de mesures d’information est la projection structurellement cohérente de tableaux à (au moins) deux entrées. Les raisons de leur présence dans la systémique en gestion sont d’abord qu’ils’agit de mesures associées à des systèmes d’information et, ensuite, que le problème lui-même a une implication très pertinente dans de vastes problèmes à gérer, comme le régime des pensions et la sécurité sociale, où cette méthode a été appliquée avec bonheur et volupté – laissant aux Lectrices deviner par qui.

Le résultat en a été la prévision d’un tel déficit des pensions – lequel s’est confirmé par les données ultérieures – que, pour des raisons de dialogue politique, il a été prié de ne pas se manifester trop bruyamment.

Cette problématique englobe les "cas" d’applications que l’on vient de passer en revue : l’agrégation, les confrontations de grandeurs bivariées et les projections. Comme ces composantes sont devenues familières, on pourra se concentrer à présent sur un aspect original, mais quasi inextricable par d’autre moyens, à savoir la projection de cellules jointes à partir des projections marginales.

Formellement, le problème est facile à décrire. Soit une époque de référence t, et une époque-horizon, d’indice h. Les données initiales sont un tableau croisant deux entrées de partitionnement d’une même grandeur, par exemple l’offre et la demande de produits (en nombre d’unités), ou la répartition classique produit-marché, ou encore la répartition croisée de ressources hospitalières (comme des lits, des unités de soin) selon les catégories de pathologie ; pour tous ces cas, on dira ici "Offre-Demande" pour la simplicité.

Le premier plan du Tableau 22 montre de telles données, ramenées au strict minimum pour l’exposé, c’est-à-dire deux secteurs et deux produits. Ensuite se résentent trois dérivés de même structure servant également à cette explication.

Soit que des prévisions impliquent, à l'horizon H, une modification des grandeurs situées en marges, c'est-à-dire des sommes, ou agrégats. Le deuxième plan du tableau n'en montre qu'une nouvelle répartition de l'entrée produit (bien que l'on puisse généraliser) et une somme constante, pour rendre évident un argument qui va suivre.

La contribution demandée à la méthode est de fournir des projections jointes, c'est-à-dire de "remplir le tableau" intérieur.

Tableau 22. Quantités et parts relatives "produits-secteurs"

Demandes / Offre	Secteur j=1	Secteur j=2	Sommes (Produits)
Produit i=1	20 (0,20)	20 (0,20)	40 ($q_{1.}$=0,4)
Produit i=2	20 (0,20)	40 (0,4)	60 ($q_{2.}$=0,6)
Sommes (Secteurs)	40 ($q_{.1}$=0,4)	60 ($q_{.2}$=0,6)	100 (1,00)
Le problème :	Projections demandées		Projections données
Produit 1	?	?	$p_{1.}$=35
Produit 2	?	?	$p_{2.}$=65
Sommes (Secteurs)	$p_{.1}$= 40	$p_{.2}$=60	100
Cas de nouvelle répartition interne	Secteur 1	Secteur 2	Sommes
Produit 1	20	15	35
Produit 2	20	45	65
Sommes	40	60	100

Le troisième plan montre une innovation de répartition interne ; il s'agit du deuxième secteur, sans affecter le premier. Une telle modification ne peut être élaborée à partir de l'information contenue dans les répartitions marginales, en raison du nombre de degrés de liberté permettant de telles possibilités.

La méthode fondée sur la théorie de l'information, dite "TSF" dans un instant, fournit la solution du plan 3 exprimée en valeurs relatives. Il est facile de les rendre absolues ensuite. Les parts des secteurs ont été réaménagées pour bénéficier "dans la même mesure" de la modification structurelle marginale des produits, ce qui est l'hypothèse de base de la méthode et permet l'obtention d'une solution.

L'obtention des parts relatives jointes, disons les p_{ij}, conditionnellement aux totaux marginaux, n'est bien sûr pas unique : le nombre de lignes est n et m le nombre de colonnes, le nombre de degrés de liberté "à élucider" est (n-1)(m-1), à savoir les nm cellules moins les (n+m) contraintes marginales.

Dans le cas ultra-simplifié sous revue, il n'y en a qu'un seul. Pour chacun des degrés de liberté, il y a donc – par définition – toutes les possibilités numériques, ce qui fait du monde, même en se limitant à celles qui sont positives.

Un bon exercice pour les nerfs, pour s'amuser quand il n'y a pas de match à la télé, est d'essayer "à la main" sur un petit tableau de quelques lignes et colonnes. Concrètement, dans le cas de prévisions en gestion, ce sont souvent les prévisions marginales qui sont faites, et éditées. En effet, elles sont bien sûr plus agrégées, donc bénéficient de plus d'inertie, mais aussi elles sont faites par des responsables de secteurs, divisions ou marchés d'une part, et d'autre part de lignes de produit.

La première galère est d'ajuster ces totaux pour faire, par lignes et par colonne, un même total général. Ensuite, pour poursuivre la réunion si tard que Madame retourne chez sa mère, on attaque les cellules du tableau... On pourrait aussi demander à des gens moins importants de prévoir les cellules, et construire les prévisions par agrégation et faire les totaux... On peut aussi faire l'exercice simultanément par les deux bouts et se rencontrer... c'est comme cela qu'on peut avoir deux tunnels sous la Manche.

La méthode "Two-stages Information Forecast", la TSF, a été initiée par H. THEIL (1967), puis reprise par DE BRUYN (1972), et développée par COLSON ET BRACHWITZ (1973) et DE BRUYN (1975). Elle est fondée sur l'hypothèse de constance l'information mutuelle des cellules de ligne i et de colonne j, qui devra être respectée pour la projection :

$$I_{ij} = l_g\,[q_{ij}/q_{i.}\ q_{.j}]$$

L'implication est importante :

- D'une part, elle permet de lever les degrés de liberté pour obtenir une solution ;
- Mais elle implique que les "coefficients techniques" sont constants, donc qu'il n'y aura pas, d'ici l'horizon, de jeux internes d'allocations non relatifs aux totaux marginaux.

Se rappelant, par le Tableau 22, que les "q" sont réalisés, et les p_i et p_j sont prévus, la première phase de projection est donc d'établir les p_{ij} tels que :

$$\text{(a)} \qquad \lg\frac{q_{ij}}{q_{i\circ}q_{\circ j}} = \lg\frac{p'_{ij}}{p_{i\circ}p_{\circ j}}$$

De (a) on tire à vue :

$$\text{(b)} \qquad p'_{ij} = \frac{p_{i\circ}p_{\circ j}}{q_{i\circ}q_{\circ j}} \cdot q_{ij}$$

La projection (b) ne garantit pas que la somme des "probabilités" – c'est-à-dire la somme de toutes les parts relatives jointes du tableau prévisionnel – soit égale à 1.

Un premier ajustement nécessaire est la révision (c):

$$\text{(c)} \qquad p''_{ij} = \frac{p'_{ij}}{\sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} p'_{hk}}$$

La solution (c) doit à présent, et c’est le challenge de la méthode, répondre aux conditions de cohérence marginale, rappelées sous (d):

$$\text{(d)} \qquad \sum_{j=1}^{m} \hat{p}_{ij} = p_{i\circ} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} \hat{p}_{ij} = p_{\circ j}$$

On ne peut satisfaire (d) brutalement, sous peine de perdre (c) ; de plus, il n’y a pas qu’une seule solution.

Seulement, (c) n’est qu’une hypothèse faite pour simplifier et avancer, mais pas une contrainte mathématique ; il n’est donc pas interdit d’apporter aux p''_{ij} des modifications le plus petites possibles. A cette fin, la TSF va minimiser l’espérance de gain d’information appliquée aux p''_{ij} et son estimateur :

$$\text{(e)} \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p''_{ij} \cdot \lg\frac{p''_{ij}}{\hat{p}_{ij}}$$

La minimisation de (e) demande un processus itératif appliqué à la composante quadratique du développement en série de (e). À cette fin, on peut appeler l’algorithme de STEPHAN, F. (1942), aménagé et programmé par COLSON et De Bruyn (1973). Le résultat est effectivement l’allocation recherchée. Mais que l’on ne torde pas le nez : le truc est efficace, permettant de réaliser, sous l’hypothèse citée, une allocation interne dans plusieurs centaines de cellules.

Ceci étant fait, on peut alors disposer de l’ensemble de données, réalisées et prévisionnelles, pour y associer un certain nombre d’indicateurs, dont certains originaux, tels que la décomposition de l’erreur de prévision structurelle. Bien sûr, on peut aussi passer outre, et aller surfer ailleurs, ayant assez vu de p, q, et autres petits morceaux d’un tout qui somme sur 1. C’est d’autant plus justifié que Paul VALÉRY a dit : "C’est un vice que de préférer la partie au tout".

2.6.2 Synthèse des mesures d’information sur les tableaux prévisionnels

Avec Gérard COLSON, Chargé de cours à l’ULg.

L’encart suivant synthétise le package traitant cette problématique de la projection de tableaux, en désignant les entrées par O et D comme ci-dessous, conformément aux sources COLSON-BRACHWITZ (1973), et DE BRUYN (1972):

		O_f
	p_{ij}	$p_{i.}$
D_j	$p_{.j}$	1

Encart 1. Synthèse des définitions univariées et des relations statiques

Entropie de l’offre O ou des outputs :

$$H(O) = -\sum_{i=1}^{n} p_{i\circ} \cdot l_g\, p_{i\circ}$$

Entropie des demandes D :

$$H(D) = -\sum_{i=1}^{n} p_{\circ j} \cdot l_g\, p_{\circ j}$$

Entropie jointe :

$$H(O, D) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \cdot l_g\, p_{ij}$$

Espérance de quantité d’information mutuelle :

$$I(O;D) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \cdot l_g \frac{p_{ij}}{p_{i\circ} \cdot p_{\circ j}}$$

Cette information mutuelle est la somme des marginales moins l’entropie jointe :

$I(O;D) = H(O) + H(D) - H(O,D)$

Entropie de l’offre O conditionnelle à la demande D (où $p_{i|j} = p_{ij}/p_{.j}$) :

$$H(O|D_j) = -\sum_{i=1}^{n} p_{i|j} \cdot l_g\, p_{i|j}$$

Espérance d’entropie de l’offre (ou des outputs) conditionnelle à la demande :

$$H(O|D) = -\sum_{j=1}^{m} p_{i|j} \cdot H(O|D_j) = H(O, D) - H(D)$$

Espérance d’entropie de la demande D conditionnelle à l’offre O :

$$H(D|O) = -\sum_{i=1}^{n} p_{i\circ} \cdot \sum_{i=1}^{n} p_{j|i} \cdot l_g\, p_{j|i} = H(O, D) - H(O)$$

Espérance d’information sur une entrée, étant donnée la connaissance de l’autre :

$I(O;D) = H(O) - H(O|D) = H(D) - H(D|O)$

L’Encart 2 qui suit présente des relations dites "dynamiques" parce qu’il y a révision des probabilités "a priori" (p_{ij}) en les probabilités "a posteriori" (q_{ij}).

Encart 2. Synthèse des définitions bivariées et relations dynamiques

Les "demandes" correspondent aux probabilités a posteriori "q";
Les "offres", ou outputs, correspondent aux probabilités a priori "p"

Espérance de gain en information des outputs

$$I_O\left(q_{i\circ};p_{i\circ}\right) = \sum_{i=1}^{n} q_{i\circ} \cdot l_g \frac{q_{i\circ}}{p_{i\circ}}$$

Espérance de gain en information des demandes

$$I_D\left(q_{\circ j};p_{\circ j}\right) = \sum_{j=1}^{m} q_{\circ j} \cdot l_g \frac{q_{\circ j}}{p_{\circ j}}$$

Espérance de gain en information jointe des demandes et des outputs

$$I_{O,D}(q_{ij};p_{ij}) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} q_{ij} \cdot l_g \frac{q_{ij}}{p_{ij}}$$

Espérance de gain en information des demandes conditionnelle à l’output i

$$I_{D,O_i}(q;p) = -\sum_{j=1}^{m} q_{j|i} \cdot l_g \frac{q_{j|i}}{p_{j|i}}$$

Espérance de gain en information des demandes conditionnelle aux outputs

$$I_{D,O}(q;p) = -\sum_{i=1}^{n} q_{i\circ} \cdot I_{D,O_i}(q;p)$$

Espérance de gain en information des outputs conditionnelle à la demande

$$I_{O|D}(q;p) = -\sum_{j=1}^{m} q_{\circ j} \cdot \left[q_{i|j} \cdot l_g \frac{q_{i|j}}{p_{i|j}}\right]$$

Les relations conditionnelles générales sont donc :

$$I_{O|D}(q;p) = I_{O,D}(q;p) - I_D(q;p)$$

$$I_{D|O}(q;p) = I_{O,D}(q;p) - I_O(q;p)$$

Le Tableau 23 résume les mesures d’erreurs de prévision structurelles, c’est-à-dire relatives aux confrontations entre les projections ("p*") et les réalisations H. Par légèreté d’esprit et de lettre, on mettra l’indice "H" pour "Horizon" en exposant.

Avec cet instrument-là, et les définitions soignées des encarts précédents, il est loisible à chacun d’enquiquiner 10 Lecteurs et 200 paroissiens pendant deux neuvaines.

Tableau 23. Synthèse des mesures d’erreurs de prévision

Erreurs de prévision structurelles	Formule	Commises sur l’objet du tableau à l’horizon H :
JOINTE	$\frac{1}{2}[\ I_{D\mid O}\ (q_{ij}^{H}\ ;\ p^{*}_{ij}) + I_{O\mid D}\ (q_{ij}^{H}\ ;\ p^{*}_{ij})\ ]$	– la distribution jointe
MARGINALE SELON LES LIGNES	$I_{O}\ (q_{i.}^{H}\ ;\ p_{i.})$	– les lignes du tableau
MARGINALE SELON LES COLONNES	$I_{O}\ (q_{.j}^{H}\ ;\ p_{.j})$	– les colonnes du tableau
MARGINALE	$I_{O}\ (q_{i.}^{H}\ ;\ p_{i.}) + I_{O}\ (q_{.j}^{H}\ ;\ p_{.j})$	– l’ensemble des distributions marginales
TOTALE	$I_{O,D}\ (q_{ij}^{H}\ ;\ p^{*}_{ij})\ ]$	– ensemble des distributions
COHÉRENCE	E. Totale = Jointe + Marginale Marginale = ½ (Marg. ligne + Marg. colonne)	– Mesures d’agrégation

C’est très bien de reconnaître ses erreurs, et les confessionnaux sont pleins de celles qu’on ne regrette pas, mais encore faut-il les situer comme il faut. Ainsi, une hypothèse opérationnelle de la méthode est celle de la constance du degré de dépendance mutuel (vis-à-vis des lignes et des colonnes). Celle-ci n’est pas restée vierge, puisqu’une procédure mathématique de convergence lui est appliquée pour la cohérence des sommes.

Cette variation du degré de dépendance peut être exprimée ; elle est d’autant plus grande que ce degré est élevé, et que les écarts structurels prévus sont importants. Ceci se traduit par la composante résiduelle :

$$I_D(q) - I_D(\hat{p}) \ = \ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\hat{p}_{ij} - q_{ij}) \cdot l_g \frac{q_{ij}}{q_{i_{\circ}} q_{{}_{\circ}j}}$$

Et voilà.

Celui ou celle qui n’en pas assez peut consulter son bréviaire : on n’en a cure.

3 L'infotropie et son énergie

3.1 De quoi s'agit-il ?

Le montant d'information a été défini et construit en fonction du rapport du nombre d'états possibles d'un domaine borné ; une version spécifique de l'entropie a été appelée comme variable d'état pour le caractériser et le mesurer en fonction de la répartition de ces états. Cette version de l'entropie et de son mode d'emploi est récente dans l'histoire de la thermodynamique ; comme elle est simpliste et peut servir à quelque chose, c'est celle qui a ici été mise en relation avec la gestion.

Cependant, le pèlerinage de la science qui l'a précédée a été long et parsemé d'incantations ésotériques, et il n'est pas honnête de n'en rien dire. De plus, la thermodynamique est à elle seule un grand domaine des systèmes, qui mérite donc une visite guidée :

- Une première contribution de cette section est une incursion touristique apportant des renseignements sur les concepts originaux de la thermodynamique. Ensuite, les Lectrices survivantes verront ce que ces concepts sont devenus quant ils ont été soumis à une exploitation honteuse dans les ateliers de l'information des gestionnaires.

Une des clefs ouvrant les portes de la théorie de l'information appliquée est la variation de la répartition des probabilités des états entre une situation initiale a priori π_1 et une situation a posteriori $\pi_{2,}$ ce qui est typifié par :

(a) $I = k.l_n(\pi_2/\pi_1)$

L'expression (a) contient une constante k, une sorte de parasite dû à BOLTZMANN, qui sera explicitée plus loin.

Le thème traité est que, en thermodynamique, les transformations spontanées des ensembles fermés sont irréversibles, et la "flèche du temps" est définie comme celle de l'entropie croissante, alors qu'ici l'entropie peut diminuer (on parlera de "néguentropie"), avec un "gain en information" positif. Des apports extérieurs sont dès lors nécessaires pour faire varier la répartition des états et pour concentrer les "degrés de croyance" sur certains états :

- Un deuxième thème traité dans cette partie est de repérer et définir cette contribution externe – en diminuant l'entropie ? – et montrer si elle peut correspondre à un gain en information et si cette analogie "des mots" est scientifiquement justifiable.

S'enfonçant plus avant dans les fantasmes, on avance imprudemment que les degrés de croyance concentrés sur des sous-ensembles d'états "dégagent une énergie", en ce sens qu'ils stimulent une éventuelle action chez les gestionnaires. Cette assertion peut toujours être faite – elle n'engage à rien – mais il est plus intéressant de voir si une telle analogie avec un dégagement d'énergie en thermodynamique pourrait avoir quelque fondement :

- Une troisième contribution est d'explorer la validité de correspondances entre l'information et la thermodynamique qui encourageraient des acteurs de la gestion à réagir, ou conclure que l'information mise sous cette forme "entropique" n'est qu'une bavure de plus des agents de la thermodynamique.

3.2 Information et liberté

Reprenons l'expression de l'information sous la forme (a) ci-dessus :

$$I = k.l_n(\pi_2/\pi_1)$$

Cette version "entropique" de l'information (initialement discernée par L. SZILARD, et reprise par HARTLEY en 1929) peut être située selon deux points de vue :

1 Soit celui des êtres mathématiques, ou statistiques. Dans ce cas, la similitude entre l'information et l'entropie s'adresse à toute situation qui peut être définie formellement de cette façon, indépendamment de toute considération de signification. Cette information se formule, se transforme, se meut et se transmet en toute "liberté", c'est-à-dire en dehors des obligations imposées par un système physique réel. Pour cette raison, elle paraît correspondre à celle qui est qualifiée de "libre" par BRILLOUIN (1950, p.148).

Dans cette optique, la liaison avec l'entropie n'est qu'un choix des mots, inspiré par la définition statistique de l'entropie (cf. infra). On aurait même pu en créer d'autres – et n'aurait pas eu besoin de se shooter à l'enthalpie, énergie de GIBBS et autres drogues molles. Des contextes d'application à relents systémiques en sont par exemple le codage, le cryptage, les réseaux et supports de communication, l'analyse linguistique.

Toutes les sections précédentes sur les tableaux de parts relatives peuvent être considérées comme des exploitations de ce formalisme.

2 Soit selon le point de vue des formulations de la thermodynamique qui sont validées et appliquées dans les systèmes physiques. On ne s'interroge qu'ensuite, en savant consciencieux, sur l'intérêt d'en transposer certaines (sans trop les trahir) dans le domaine de la gestion.

Cette information mise en correspondance avec les domaines réels, physiques, de référence, et qui en subit les contraintes de validité, est qualifiée de "liée" (par ce domaine). Un bon exemple en sera l'entrée en jeu de la néguentropie, laquelle sera en opposition avec un principe fort de la thermodynamique imposant la croissance de l'entropie dans un système isolé.

C'est ce second point de vue qui prévaut dans les deux premières sections de l'exposé, mais avec un tribut à verser à des discours théoriques déjà acclamés, pour faire le malin, comme d'habitude, mais surtout pour faire partager cette joie intérieure que procure la vraie Connaissance. Mais finalement, comme tant de vies exemplaires, les contributions directes de ces correspondances sont peu élevées, et leur déclaration comprend plus de frais professionnels que de revenus pour la gestion.

Voilà donc quelques lignes du programme. Ce n'est pas un vol plané qui lâche ici et là des taches de connaissances comme font les pigeons sur les touristes de Venise : il est construit pour raconter ce que font les thermodynamiciens pendant que les gestionnaires installent des conditionnements d'air pour rafraîchir leurs siestes hormonales et condenser les vapeurs de leurs ménopauses neuronales.

Après tout, ce sont les systèmes élevés à la sauce thermodynamique qui sont devenus de vrais savants.

3.3 Un peu de chaleur inhumaine

3.3.1 La thermodynamique

La thermodynamique est une science phénoménologique qui traite des transformations physiques et chimiques et des énergies qui leur sont associées. Elle se réfère uniquement à la caractérisation d'états à l'échelle macroscopique et au bilan des transformations ; la notion temps n'intervient pas. La vitesse des réactions chimiques – domaine de la cinétique chimique – est un voisin de palier, mais on n'est pas obligé de le fréquenter.

En exploitant la caractérisation des états et en utilisant un modèle mathématique, la thermodynamique a pour mission de prévoir la possibilité de transformations envisagées et, si elles peuvent l'être, définir les échanges d'énergie impliqués puis la résultante de ces transformations.

3.3.2 Conventions spécifiques

La thermodynamique a sa propre définition, très restrictive de système : "domaine de l'espace défini et son contenu susceptible de subir une transformation" ; ce qui n'est pas le système, objet de l'étude et des phénomènes, en constitue le milieu extérieur.

- Malgré les réticences qu'impose la définition rigoureuse de "système", on ne peut se contenter de remplacer ici ce mot par "entité", car cela limiterait le propos à la totalité (le point de vue macroscopique), alors qu'on s'intéresse souvent aussi à ce qui se passe dans ses bornes (le point de vue microscopique, celui des particules discernables). Les bornes peuvent en être élastiques, perméables, transparentes, conductrices si l'on veut, mais elles ne sont pas floues, en ce sens que la fonction d'appartenance au système est claire et nette : on est dedans ou dehors ;
- On ne pourra pas non plus dire "corps", bien que les caractéristiques en soient présentes, car d'une part ce terme a une connotation plus biologique et, d'autre part, un corps désigne en chimie-physique un type d'ensemble homogène de particules. Donc, comme tout ce beau monde, on parlera ici, ô surprise, de système.

Il en résulte des conventions indispensables pour cerner la validité des assertions et des lois ; ainsi les "types" de système sont ici caractérisés par la nature des échanges avec le milieu extérieur, lesquels... passent les bornes !

Les vieux classiques les distinguent comme suit :

- Ouvert : peut échanger de la matière et de l'énergie avec l'extérieur (par exemple un feu de bois, les systèmes biologiques) ;
- Fermé : peut échanger de l'énergie mais pas de matière avec l'extérieur (fluide d'un réfrigérateur) ;

- Isolé : aucun échange avec l'extérieur (mais cela n'exclut pas des transformations internes de matière, telles que les réactions chimiques).

Mais y a-t-il vraiment des "isolés" ?

La solitude, ça n'existe pas...

Ce sont des conditions théoriques sans retombées terrestres. Ainsi le Lecteur, vu sa classe, a certes en cave quelques bouteilles de Saint Emilion – disons, au hasard, un Château Orisse-Ducasse – en état de conservation avancée. Celui-ci a pris son bois et son tanin dans les trois chênes (de l'Allier, de l'Alsace et de Corrèze), mais ensuite mis en bouteille, bouché, bloqué par une coiffe d'étain et mis à l'abri de la lumière, il a tout du système isolé. Il a depuis longtemps fini sa fermentation, bien sûr, et il n'y a plus de sucre du fruit. Mort et sarcophagé, il n'a plus non plus de réactions internes. Il ne se passe plus rien.

Alors, comment se fait-il qu'il "vieillit" ? Et même – ce qui n'est pas le cas de tout le monde – qu'il vieillit si bien? Et pourquoi le vin de Cahors, qui fleurit en deux ans, "sèche" après cinq ans et perd son fruit, comme Ninon de LACLOS à nonante ans ? Que se passe-t-il, et comment cela se passe, alors qu'on a un système apparemment "isolé" ? (Comme Ninon dans sa tour ?)

Une des réponses est que le système n'est pas totalement isolé ; il reste un très, très faible échange au travers du bouchon et de la coiffe d'étain, lequel permet une douce, une très douce oxydation, à peine ressentie, une caresse de l'âge qui lui donne peu à peu sa maturité, son charme discret et empreint de courtoisie, quand la bouteille a des voûtes qui s'affaissent, que son étiquette se fane tandis que l'image du château qu'elle porte a quelques pierres qui s'éboulent, des créneaux du courlis où il manque quelques dents, une herse qui tient lieu de sourire.

Puis une poussière grise recouvre le mirage du Château qui orne son blason avant que d'en moisir, et enfin la lie se dépose, quand le corps du vin se décompose, que son énergie devient entropie, et qu'il montre par là l'inexorable, l'irréversible lisier de cette terre, mais aussi la glorieuse ascension de son arôme vers le palais où, embaumé à jamais, le vin momifie sa saveur.

3.3.3 Les grandeurs en présence

L'Encart 1 présente une typologie des grandeurs exploitées pour définir un système au sens de la thermodynamique et décrire ses transformations :

- Les grandeurs extensives dépendent de la quantité de matière mise en jeu ;
- Une grandeur intensive peut être exprimée selon le rapport de deux grandeurs extensives, par exemple :
  - La pression, par le rapport d'une énergie à un volume ;
  - La température, rapport d'une énergie à une entropie.

Les grandeurs intensives peuvent donc être définies localement, c'est-à-dire en des sous-ensembles ou des points du corps ou du système. Cette distinction est utile si l'on veut distinguer des répartitions différentes de composantes dans un système ; c'est en effet à partir d'inégalités de répartitions – d'entropie non maximale – que pourra se dégager un travail ou une énergie, ce qui est un thème prévalent annoncé pour cette partie de l'exposé.

Encart 3. _Grandeurs permettant de définir un système et sa transformation

Extensives : dépendent de la quantité de matière mise en jeu (la masse m, la charge q le volume V, l'énergie E, l'entropie S).

Elles sont additives.

Variables d'état
Grandeurs d'état indépendantes, caractérisant un système et son évolution (Pression P, Volume V, Nombre d'atomes ou quantité de matière N, température T, ainsi que :
c la concentration, m la masse, v la vitesse, etc.)

Grandeurs d'état
(Grandeurs mesurables qui caractérisent l'état d'un système)

Intensives : ne dépendent pas de la quantité de matière mise en jeu (la masse volumique, la concentration en mol L^{-1}, la pression P).
Elles ne sont pas additives.

Fonctions d'état
Grandeurs reliées aux variables d'état par une relation mathématique dite "équation d'état"

Exemples : l'énergie cinétique (ε_c)
l'énergie interne (U)
l'enthalpie (H), l'entropie (S),
l'enthalpie libre de Gibbs (G),
l'énergie libre de Helmholtz, (F),
la pression, si définie par f(R, V, T)

Grandeurs

Grandeurs d'échange ou "de transfert"
(Grandeurs caractéristiques d'une transformations du sytème)

Elles tranduisent un transfert entre le système et le milieu extérieur
- soit de matière : nombre d'atomes, de moles ;
- soit d'énergie : une quantité de chaleur Q (un transfert d'énergie désordonné) ou de travail W (transfert d'énergie ordonné)

3.4 Les transformations

3.4.1 Les modes d’élucidation

Une transformation, en thermodynamique, est un processus qui gère l’évolution d’un système d’un état dit "initial" à un état "final" – même si ces deux états sont très proches, "différentiellement" proches l’un de l’autre. L’état final n’est pas "définitif", comme on l’a maintes fois dit du communisme ; c’est simplement un nouveau repérage cohérent des grandeurs en présence, reconnaissable donc s’il se reproduit identiquement.

Le Tableau 24 raconte cela aux enfants.

Tableau 24. États et transformation

Processus	Caractérisé par	
État initial	Les variables d’état P_I, T_I, V_I, N_I,...	Les fonctions d’état $X_I(.)$
Évolution	Les grandeurs de transfert Q et W	La variation des fonctions d’état
État final	Les variables d’état final P_F, T_F, V_F, N_F,...	Les fonctions d’état final $X_F(.)$

La transformation peut être élucidée des façons suivantes :

- Soit par la comparaison des variables et des fonctions caractérisant l'état initial à celles caractérisant l'état final, ainsi que par la précision des états intermédiaires. Ceci correspond à la description externe de la "boîte noire", dont parle l’exposé sur « Les Modèles de processus ».
- Soit à partir des grandeurs traduisant un transfert entre le système et le milieu extérieur, soit de matière, soit d'énergie. Ces grandeurs ne se définissent pas seulement via la modification d’état, mais encore par le processus de cette modification, qui peut prendre plusieurs "chemins" pour arriver cependant à la même description d’état final.

  Ceci peut être illustré par l’arrêt d’une voiture :

  - Soit en freinant, auquel cas il y a transfert d’énergie cinétique (ε_c, qui s’annule à l’arrêt) au milieu extérieur sous forme de quantité de chaleur (Q) ;
  - Soit en percutant la porte du garage, ce qui transfère ε_c sous forme d'un travail (W) de compression de l’obstacle. Dans les deux cas la même quantité d’énergie a été transformée, mais faisant apparaître des grandeurs de transfert Q et W différentes.

3.4.2 Transformations d’état physique élémentaires

Dans des conditions normales, l’état des corps est défini par ses variables d’état, aux premières loges P (pression), T (température), et V (volume) ; la quantité de matière n peut ou non être constante. Les états physiques élémentaires qui en résultent sont familiers : solide, liquide, gazeux.

Précisément pendant le changement d’état physique à pression fixe, la température reste constante, et les états peuvent coexister tant qu’il reste une quantité de matière candidate à la transformation. Ainsi on parle du "point triple de l’eau" à la température convenue de T=273,16 K. Concrètement, à un certain seuil de température, dite d’équilibre du changement d’état, la quantité du corps initial diminue, tandis que se forme un nouveau corps, dit final.

Ainsi, un cristal devient un liquide (la transformation est la fusion), ou un gaz (par sublimation), un liquide devient un gaz par vaporisation, un cristal peut se décomposer ou se composer en ses éléments, ce qui est une réaction chimique. Le nombre et la composition des particules reste la même, mais ce sont les liaisons et les modes de combinaison qui ont changé.

3.4.3 Transformations selon les échanges de chaleur

Les transformations donnant le plus d’émotions sont :

- Endothermique : le système absorbe de la chaleur (Q>0) ;
- Exothermique : le système dégage de la chaleur (Q<0) ;
- Adiabatique : pas d'échange de chaleur (succession d’états d’équilibre) ;
- Isotherme : la température du système est constante ;
- Isobare : la pression reste constante.

3.4.4 Réversibilité et état d'équilibre

- La transformation inverse est telle que les grandeurs de la transformation directe sont affectées du signe opposé. C’est un propriété différente de la réversibilité. Par exemple, la condensation est la transformation inverse de la vaporisation.
- La transformation irréversible est telle qu’elle ne se fait spontanément que dans un sens. Si, par exemple, on ouvre le robinet d'une bouteille de camping-gaz, le gaz comprimé se détend dans l'atmosphère et il n’est pas facile de le remettre dedans, surtout si on l’a déjà fait brûler.
- L’état d'équilibre est l'aboutissement macroscopique d'une transformation ; on n'y observe plus de modification des variables du système et il n'y a plus de transfert entre le système et le milieu extérieur. Ainsi la transformation précédente s'arrête lorsque la pression à l'intérieur de la bouteille est égale à la pression extérieure.

  Il y a une grande distinction à faire entre les équilibres thermodynamique, statique, et l’état stationnaire :

  - Un équilibre thermodynamique est l'aboutissement macroscopique d'une transformation irréversible. Cependant, à l'échelle microscopique, la transformation de l'état

initial I vers l'état final F (I $\Rightarrow$F) peut se poursuivre avec une vitesse v_1, alors que parallèlement se produit la transformation inverse (F $\Leftarrow$ I) avec une vitesse v_2=- v_1 telle qu’au niveau macroscopique on n'observe plus d'évolution du système;
- Un équilibre statique est atteint quand il n'y a plus de transformation;
- Un état stationnaire est un état d'équilibre apparent que l'on maintient par transfert de matière entre le système et le milieu extérieur. Pour exemple simpliste: compenser en temps réel une perte de liquide par un apport égal. À votre santé.

- Une transformation réversible ne se fait que par des transformations infiniment petites telles que l'on puisse considérer, à chaque étape, que le système est en état d'équilibre. Une transformation réversible étant donc une suite continue d'états d'équilibres très délicats, elle peut s'arrêter à chaque instant et se faire en sens inverse en repassant par les mêmes états d'équilibre.

Et tant qu’on est victime des transformations de l’état, autant garder quelque distinction de classe, mais dite avec sobriété:

- Cinématique: qui se meut;
- Dynamique: qui se transforme.

Toute transformation réelle, cependant, est forcément irréversible; la transformation dite réversible n’est que la limite d'une transformation réelle où les conditions de réversibilité – c’est-à-dire la possibilité de la réaliser dans les deux sens – seront vérifiées; elle est donc fictive. Deux exemples familiers en sont:

- Si on chauffe progressivement un corps pur par transfert de chaleur, puis le laisse simplement refroidir, la transformation paraît faite de façon identique dans les deux sens, et réalisée dans des conditions réversibles;
- La liquéfaction du zinc (à 692,6 K, sous une pression P de 105 P_a), est une transformation réversible aux yeux de l’observateur; tant qu’il reste du solide, la température restera la même, et la cristallisation (transformation inverse) se fera à la même température.

Cependant, on associe aux transformations réversibles un dégagement d’entropie "produite" définissant une irréversibilité et dépendant du chemin de la transformation et de la pression; il vaut mieux, dès lors, renoncer à considérer une symétrie dans les expressions "réversible" et "irréversible". Cela montre (clairement?) que, si la thermodynamique est souvent contre-intuitive et difficile à interpréter, c’est parfois en raison du mauvais choix ou de l’inadéquation des mots par rapport aux concepts.

3.5 Propriétés et signe des grandeurs associées à des transformations

3.5.1 Les opérations et représentations des variables

a Différentielle

- Les grandeurs d'état admettent une différentielle et une dérivée partielle; on peut, en effet, distinguer deux valeurs (très) voisines de telles grandeurs, ce qui permet d’exprimer celle de la pression (dP), du volume (dV), de l’entropie (dS), de l’énergie (dU), de la température (dT), et du nombre de particules (dn), et d'écrire les intégrales selon ces arguments ;

- Les grandeurs de transfert n'admettent pas de différentielle ; on ne conçoit pas la différence entre des "valeurs" voisines, puisque ces grandeurs n'existent que pendant le transfert. Pour des transformations élémentaires, on écrira alors δQ (la quantité de chaleur), et δW (le travail "Work" en anglais) pour le spécifier, mais l'écriture intégrale est permise car leur accumulation est significative.

b Signe

La convention des signes est que tout apport au système a le signe positif. Ce système est récepteur et "s'enrichit" de la grandeur citée. Un apport de chaleur Q, de travail W, une augmentation de pression P, sont des variations positives.

c Variations

Un système peut présenter simultanément des variations positives et négatives, telles que céder de la chaleur et recevoir du travail, selon ses conditions (ouvert, fermé, en équilibre) et selon la transformation : ce sont là, justement, les petits jeux de la thermodynamique, qui en prédit et établit les bilans.

3.5.2 Les fonctions d'état

a La pression

Toute variable d'état qui est reliée à d'autres par une équation d'état devient une fonction d'état. Honnêtement, c'est l'interdépendance et la non-linéarité des relations ou fonctions d'état qui complique la vie et fatigue les gestionnaires, habitués aux règles de trois de la comptabilité.

Un exemple incontournable en est la pression P. Du point de vue général, la pression d'un fluide est définie par la force, par unité de surface, que ce fluide exerce sur une surface élémentaire S^e suivant sa normale $n_{(f,S)}$:

$$F_{f\to S} = p.\ S^e{}_{n(f,S)}$$

On peut donc sentir en y trempant le doigt que la pression augmente lorsque le nombre de niveaux énergétiques des particules augmente.

Mais pour pouvoir jouer des jeux analogiques avec la gestion, on se fera d'abord des relations avec les gaz parfaits, telle que l'incontournable :

$$P.V = n.k.T, \quad \text{d'où :} \quad P = n.k.T/V$$

Lorsque cette loi est exprimée pour une mole de gaz :

- La quantité de matière n est alors le nombre de molécules qui correspond au nombre d'Avogadro (qui les a patiemment comptés), c'est-à-dire le nombre d'atomes contenus dans 12 grammes de carbone C_{12}, à savoir η=6,02.10^{23} à première vue ;
- On écrit alors la loi de façon courante par P.V=R.T, avec R=ηk, où R est appelée "constante des gaz parfaits" ;

- Comme la température absolue T a été définie (en kelvins, K, soit 273,16 à partir du point de phase triple de l’eau), on peut mesurer le rapport P.V/T, ce qui fournit une valeur de R=8,31 JK^{-1} (joules par kelvin);
- La constante de BOLZMANN (annoncée dans l’expression d’information $I=k.l_n(\pi_2/\pi_1)$ en 3.1) a alors une valeur impliquée issue de $k = R/\eta$, soit $1{,}38.10^{-23}$ J/K. Content?

Cependant, dans un fluide plus réaliste, on ne peut tasser les molécules infiniment les unes contre les autres; il faut leur laisser leur espace "b", ce qui réduit d’autant le volume V. De la sorte (en s’épargnant les forces répulsives), on écrira plutôt:

$$P = \eta\ kT/(V\text{-}n.b)$$

Dans l’exercice des fonctions d'état, on intègre la variable entre l'état initial I et l'état final F. En effet, la propriété fondamentale d'une fonction d'état est que sa variation ne dépend que de l’état initial et de l’état final et pas du chemin suivi. Ainsi la variation ΔP de la pression P se définit par l’intégrale:

$$\Delta P = \int_I^F dP = P_F - P_I$$

La différentielle étant définie pour ces grandeurs, celle de la pression peut s’écrire comme la somme des différentielles partielles, les autres paramètres étant constants. Ceci exprime évidemment les différentes façons de faire varier la pression macroscopique du gaz susdit:

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{T,\,n} dV + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,\,n} dT + \left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_{T,\,V} dn$$

On peut donc attaquer la pression par ses trois flancs: le volume V, la température T, et le nombre de particules, n. Voilà qui intéressera les gens qui cherchent ici les moyens thermodynamiques d’affecter l’entropie et d’énerver un sujet pour qu’il fasse quelque chose... le fameux stimulus! Mais pour en parler avec une apparence de sérieux, on a besoin d’une relation entre cette variable d’état – que l’on veut affecter – et des grandeurs de transfert qui accompagneront les échanges avec le milieu extérieur, et ce sera d’abord le travail.

3.5.3 Grandeurs de transfert

a Le travail sous pression

Letravailestunequantitéd’énergieordonnééechangéeentreuneentitéetlemilieuextérieur. Selon les milieux qu’on fréquente, on entend différentes expressions de ce travail W:

- Travail électrique. Il s’exprime en fonction de la force électromotrice ε, et de la charge reçue I.dt=q, en coulombs, où I est le courant débité – et reçu par le système – pendant l’intervalle de temps dt:

$$W = \int_I^F \varepsilon dq$$

- Travail mécanique, s’exprimant en fonction du vecteur de force F et du déplacement x :

$$W = \int_I^F \vec{F} d\vec{x}$$

- En thermodynamique, le travail dépend du chemin de la transformation . La plus simple est de procéder à une compression de gaz d’un corps en l’écrasant simplement à température constante et sans réaction chimique, ni changement du nombre de particules. Dans ce cas, le travail des forces de compression ou de détente s’exprime (en intégrant le volume V long du chemin suivi) par :

$$W = \int_I^F -P_{ext} dV$$ si la pression extérieure P_{ext} reste tranquille.

En particulier, pour un fluide, si les pressions interne (du corps) et externe (du milieu) sont à l’équilibre mécanique, on a :

$$\delta W = -P.dV$$

Ceci montre une des relations annoncées entre la variation de la variable d’état (ici c’est V) et celle de la grandeur de transfert, en l’occurrence le travail W, comme on va l’expliciter. À l'intérieur, la pression du gaz obéit à l'équation des gaz parfaits, la tarte à la crème de la thermo-cuisine :

$$P_{int} = n.R.T/V$$

Donc la quantité de travail associée est :

$$W_{rév} = - \int_I^F P_{int}.dV = - \int_I^F nR(T/V)\ dV = - n.R.T.\int_I^F dV/V = - n.R.T.[l_nV]_I^F$$
$$= - n.R.T.l_n(V_F/V_I)$$

Dans le cas de processus irréversible, l’énergie de Pression*Volume est dite élastique :

$$W_{irr} = -P_F\ (V_F-V_I)$$

On voit bien que la grandeur de transfert dépend donc bien du chemin suivi. Dès lors :

- Le travail reçu par le fluide est négatif ($\delta W<0$) s’il se détend ($V_F>V_I$) ;
- Il est positif ($\delta W>0$) si le fluide est comprimé ($V_F<V_I$, donc le logarithme est <0).

Quant aux situations réalistes, la thermodynamique n’en parle presque jamais, car cela devient trop compliqué pour les Chers Collègues.

b La chaleur des corps

La chaleur Q se définit par la quantité d’énergie transférée lorsque les molécules du systèmes inter-agissent de façon désordonnée avec le milieu extérieur. C’est une grandeur extensive, du fait que la quantité de chaleur à fournir pour une transformation dépend de la masse à transformer.

Ainsi, lorsqu'on chauffe un corps pur d'une température initiale T_I à une température finale T_F, la quantité d'énergie transférée sous forme de chaleur est égale à:

$$Q = \int_I^F nCdT$$

Dans cette expression, C est capacité calorifique molaire (soit $Q/(T_F-T_I)$, en mol^{-1} K^{-1}), et n est la quantité de matière (en moles).

Bien que ce soit un médecin (VON MAYER) qui déjà sous le règne de Johannes BRAHMS ait reconnu que l'énergie se présentait sous diverses formes, certaines ménagères et diététiciennes utilisent encore la calorie (élevant un gramme d'eau de 14,5 à 15,5° sous P=105 pascals), alors que son équivalent mécanique est de 4,18 joules.

Quant à l'interprétation microscopique du travail et de la chaleur, elle n'apparaîtra qu'à la section 4, effleurant l'aspect statistique de l'entropie, car c'est elle qui va affecter le niveau d'information.

Après le travail, et la chaleur qu'il dégage (d'où la sueur, c'est logique), on va à présent se rapprocher encore du comportement normal du gestionnaire, en rendant hommage à son énergie.

c Énergie

Ils ne le montrent pas tous les jours, aux terrasses des cafés, à l'ombre des jeunes filles en pleurs, lorsqu'ils contemplent évasivement un pneu crevé (comme le chauffeur), ou encore lorsqu'ils regardent, incrédules, des touristes qui débarquent excédés, au bord de la crise d'avidité de ne rien faire, impatients d'indolence. Cela ne se voit pas tout de suite chez les autochtones, en effet, mais le mot "énergie" vient du grec (l'ancien, fallait-il le dire ?), plus précisément energeia, qui se traduit par un formidable, thermo-dynamisant slogan politique, "la force en action".

Cette force – ou plutôt ces forces – c'est G.W. LEIBNIZ (encore lui) qui les a ramassées par terre durant les années 1678, un mardi vers 17 heures 19. Par terre ? Effectivement, il cherchait une quantité "qui se conserverait pendant la chute libre". Il est alors tombé, si l'on peut dire, sur d'une part la "force vive" devenue énergie cinétique et, d'autre part, la "force morte", dite "de la pesanteur", devenue l'énergie potentielle. On en retrouve des morceaux dans les équations du mouvement du prétentieux LAGRANGE, puis en Irlande, chez l'ami HAMILTON. M'enfin, le concept est explicite depuis 1807, d'après des écritures saintes, chez un opticien appelé T. YOUNG, célèbre par le fait qu'on l'a pas bien vu.

À l'échelle microscopique le corps est composé de particules assez remuantes, de masse m (pour un corps donné) et de vitesse de translation v_i pour la i^e molécule. De la sorte, pour ce "système", l'énergie cinétique interne est :

$$\varepsilon_c = \Sigma_i \tfrac{1}{2} m v_i^2$$

De plus, il y a une énergie potentielle mutuelle ε_p impliquée par l'interaction des molécules entre elles. Celle-ci est nulle pour un gaz parfait monoatomique, puisqu'il n'y a pas de structure interne des molécules. L'énergie interne U_i est la somme des deux :

$$U_i = \varepsilon_c + \varepsilon_p$$

Lorsqu'il y a transformation à température constante, par simple détente ou compression (d'un gaz), il n' y a pas de variation de l'énergie interne.

A l'échelle macroscopique – un corps constitué, un milieu – cette énergie interne à l'équilibre est bien une fonction d'état. L'énergie totale est une grandeur conservatrice. L'unité d'énergie la plus fatiguée est le joule, lequel équivaut au travail d'une force de 1 Newton qui déplace son point d'application de 1 m dans sa propre direction.

Ceci dit, la thermodynamique s'intéresse aux systèmes dont l'énergie interne varie par échange de chaleur et de travail avec le milieu extérieur, et son premier principe s'écrit:

$$U_F - U_i = W+Q$$

Soit, en petit différentiel:

$$dU = \delta W+\delta Q,$$

Ce premier principe (encore VON MAYER, en 1845) permet de quantifier les échanges d'énergie mais ne permet pas de prévoir si une transformation est possible ou non; et puis il n'a pas encore d'entropie, d'enthalpie et toutes ces métaphores qui font la classe scientifique de la gestion. Il faut donc enjamber celui-ci et passer au deuxième.

3.6 Entropie et critère de spontanéité

3.6.1 Définition initiale

Quand le romantisme s'est essoufflé à force de respirer dans les jardins, vers 1850, Herr Doktor Professor CLAUSIUS a subodoré une grandeur ("S") qui varie en fonction de la chaleur échangée au cours d'une transformation à température constante, et dont la variation entre deux dates, $t_1<t_2$, ne dépend que de l'état initial I et de l'état final F:

$$\Delta S = \int_I^F dS = \int_I^F \frac{\delta Q_{rev}}{T} = \frac{1}{T}\int_I^F \delta Q_{rev} = \frac{Q_{rev}}{T}$$

Q_{rev} est la chaleur échangée (en joules J) le long d'un chemin "réversible", et K est la température absolue (en kelvins K). Sous cette forme initiale, S s'exprime en $J.K^{-1}$.

CLAUSIUS est donc le premier "entropiepithèque" exhumé. Le concept d'entropie a toutefois laissé bien d'autres fossiles, dont certains sont encore vivants, et ce n'est qu'en essayant de déchiffrer leurs divers dessins rupestres qu'on pourra enfin comprendre pourquoi ses ambiguïtés en ont fait la mesure de désordre par excellence.

3.6.2 L'entropie reçue et produite

Cette entropie une fonction extensive et "non-conservative" des variables d'état; on montrera qu'elle est telle que sa variation s'exprime par la somme d'une entropie reçue, S_r et la l'entropie produite, S_p:

- L'entropie reçue (S_r) est directement liée à la quantité de chaleur transmise au système à travers sa surface séparatrice;
- L'entropie produite (S_p) a le même signe que celui de l'intervalle de temps t_2-t_1, ce qui donneuneinterprétationmacroscopiquetemporelledel'entropie:elledéfinitlaflèchedu temps(cellequiorientel'exposésur« LaDynamiquelibre »)etimposel'irréversibilitédes phénomènes réels. C'est si vrai que le mot vient du grec (ancien, s'il vous plaît) "tropos" qui indique le changement de direction.

Cette double composante de l'entropie est une propriété commune aux bilans des grandeurs extensives (un "bilan" s'établit lors de l'extinction des échanges avec le milieu extérieur), ce qui à présent sera explicité de façon générale, puis appliqué à l'entropie.

Soit la grandeur extensive Y d'un corps borné par une surface B (pour "Borne") le séparant du milieu extérieur mais pouvant permettre certains échanges, situés entre les instants t_1 et t_2, avec $t_1<t_2$. La variation ΔY est la résultante de deux contributions, Y_r et Y_p.

La contribution "Y_r" est issue des échanges avec le milieu extérieur. $Y_r>0$ est la grandeur reçue, et $Y_r<0$ est la convention algébrique désignant la grandeur effectivement fournie;

- La contribution "Y_p" est dite produite par le corps ou le système; la convention algébrique est que si $Y_p>0$, il y a apparition de cette grandeur à l'intérieur des bornes, et si $Y_r>0$, il y a disparition de cette grandeur.

Les variations s'écrivent donc:

$$\Delta Y = Y_r + Y_p,$$

- La variation différentielle de Y, c'est-à-dire Y(t+dt) -Y(t) est, en écrivant "δY" pour les "formes différentielles" de ces contributions Y,

$$dY = \delta Y_r + \delta Y_p$$

Une analogie didactique courante est celle d'un population écologique dans un milieu borné, par exemple des Francophones des Fourons. Les Y_r sont associés aux immigrations et émigrations, tandis que Y_p se rapporte à la démographie interne, naissances et décès.

Ces conventions s'appliquent comme suit pour l'entropie. Comme la quantité de chaleur $Q_{rév}$ échangée en processus réversible est différente de celle du processus irréversible, Q_{irr}, on peut désigner la différence par Q_{int}, la quantité produite en "interne":

(a) $Q_{rév} = Q_{irr} + Q_{int}$

On peut alors recomposer la variation d'entropie:

$$\Delta S_I^F = 1/T\ Q_{irr} + 1/T\ Q_{int} = 1/T\ Q_{irr} + \Delta_i S$$

Par analogie avec δY_p ci-dessus, ce terme $\Delta_i S$ a été qualifié de "production interne" d'entropie. De façon générale, celle-ci se définit par:

(b) $d_i S = dS - 1/T\ dQ_{transf}$,

Il résulte de cette définition (b) que si un système est isolé (il n'échange pas d'énergie avec l'extérieur), $Q_{transf} = 0$, et donc :

$$d_i S = dS - \frac{Q_{transf}}{T} = dS$$

Pour un système isolé, la variation d'entropie est égale à la production interne d'entropie. En conséquence, le signe de $d_i S$ est l'expression du "deuxième principe" :

Dans le système isolé, toute transformation spontanée (irréversible) est caractérisée par :

$$dS = d_i S > 0$$

Dès lors, si on veut diminuer l'entropie S, comme on peut le faire en théorie de l'information, il faudra ouvrir le système à certains échanges ; cependant on va voir que cette production interne est toujours positive ou nulle.

- En effet, si le processus est réversible :

  $dQ_{transf} = Q_{rév}$, ce qui fait que $d_i S = 0$.

- Si le processus est irréversible,

  $dQ_{transf} = Q_{irr}$, et dès lors $d_i S > 0$.

3.7 Expression "volumnique" de l'entropie

3.7.1 Une mouvance statique

En gestion, on ne veut lire que des proportions, des règles de trois et des lignes droites. Mais en thermodynamique les relations et les fonctions d'état sont non-linéaires, interactives, et même changent de forme lorsque des seuils sont franchis.

L'entropie est un tel cas de grandeur non-proportionnelle, et abstraite en ce sens qu'on ne sait pas "ce qu'elle représente". Sa définition repose sur la considération d'un processus fictif de transformation réversible qui ramènerait à un état antérieur t-h sans perte globale d'énergie dans les deux sens. Une telle fiction demande à l'esprit de se mouvoir avec agilité – l'entropie en devient "prodigieusement abstraite", a dit H. POINCARÉ en langue a parte. De plus, la multiplicité de ses expressions ne facilite pas les choses. Ainsi, selon DE DONDER (ULg, 1930) elle devient le produit de l'affinité par la vitesse de réaction, mais des bruits de couloir (de l'ULg encore) l'appellent "le volume de la chaleur".

Explicitement ou implicitement, elle est cependant inséparable de la température absolue (qu'elle définit), de sorte que la relation entre l'entropie statistique et thermique, objet de toutes les convoitises de cette section, n'apparaît pas au nez des spectateurs. Dès lors, pour ne pas en abuser de cette façon, on va lui mettre un suppositoire de l'esprit qui la rendra plus familière, en l'accompagnant d'une vision graphique.

Avec H. De Rycker (dans « Une approche de la thermodynamique », conférence donnée à l'Association des Ingénieurs de l'Ecole de Liège, le 5 mai 1981), il faut admettre, à cette fin didactique, une interprétation de l'entropie "conservative" d'une part, et "variative" d'autre part :

- Conservative veut dire qu'elle peut être définie comme une grandeur d'état, qui peut se maintenir si aucune condition ne la fait varier. On pourra dans ce cas se passer de la réversibilité imposée par Clausius ;
- La variation d'entropie, en revanche, implique toujours la température, mais via plusieurs relations et interactions, de sorte qu'on peut difficilement lui donner une réponse "linéaire" à une seule variable que l'on pourrait maîtriser.

On ne peut pas non plus gérer les variations l'entropie à sa guise, de façon progressiste, comme on l'a fait aux sections 1 et 2 en théorie de l'information "libre", qui en exploite la description statistique, car c'est une affection qui entraîne toujours des complications.

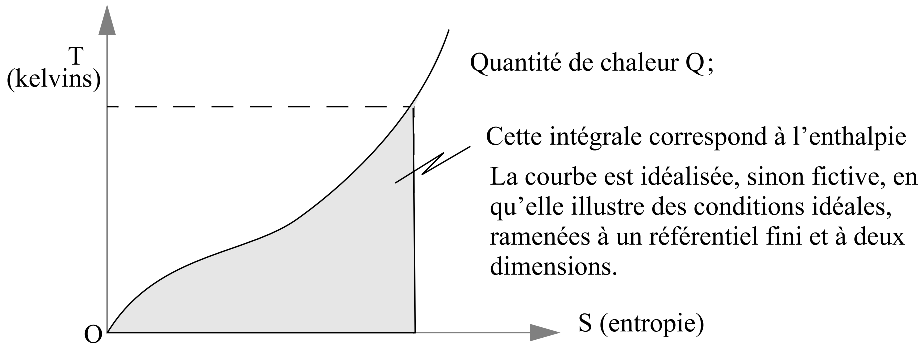
3.7.2 Le point de vue conservateur

L'analogie osée (par De Rycker et ses sources) est que les relations en thermodynamique "s'établissent comme si" elles étaient associées aux propriétés et au comportement d'un fluide fictif (mais quasi-incompressible, comme ceux que nous buvons), qui serait un fluide thermique. L'entropie serait alors interprétée comme la quantité de fluide thermique qui serait impliquée, soit de façon conservative, soit, plus intéressant, quand il se passe quelque chose, à savoir une transformation. Dans le cas dynamique, l'entropie peut varier selon le type et le sens de la transformation, mais aussi une quantité positive se libère toujours dans certaines transformations, qui seront dès lors irréversibles.

La chaleur – énergie thermique – est une propriété associée à un corps en agitation, en relation avec sa température absolue T. Considérons ce corps comme un récipient borné, son contenu en quantité de chaleur Q, et T comme la hauteur du niveau ; l'apport de "fluide thermique" fera monter ce niveau, développant alors la quantité de chaleur emmagasinée. Évidemment, cette entropie est bien une grandeur extensive, la masse de matière accrue augmentant le support de la chaleur ; on pourra donc exprimer l'entropie par mole de matière, (m^{-1}).

Ainsi, le développement de la quantité de chaleur est géométriquement rendu analogue à celui d'une aire ou d'un volume, qui est ombrée sur la Figure 1.

Figure 1. Diagramme didactique entropie-température absolue



L'aire ombrée de particules agitées représente l'énergie thermique absolue accumulée dans le corps en question, désignée par enthalpie. Cette accumulation est donc une grandeur mesurant le nombre de joules absorbées par le corps lorsque, la pression maintenue constante, sa température s'élève du zéro absolu à T° degrés kelvins. Pour cette raison, son symbole est "H" pour "Heat".

L'enthalpie est une fonction d'état, qui se définit algébriquement par :

H = U +P.V, où U désigne l'énergie interne.

Cette expression sera reprise plus loin, pour exprimer l'énergie libre dite "de Helmholtz".

Une analogie suggérée par DE RYCKER (op. cit.) fait appel aux «autres énergies fluidistiques» (sic) , où il écrit (p. 3) pour celles-ci:

- hydraulique : = hauteur de chute * quantité d'eau
- élastique : = pression * volume du gaz
- électrique : = tension (volts) * charge électrique
- thermique : = température * entropie, soit J=T.S

Cela ne manque pas de charme didactique : cette interprétation donnerait à la température une connotation de "qualité" de la chaleur, alors que l'entropie serait le "support volumique" de l'énergie thermique. Quand la température est plus basse, il faudra donc plus d'entropie pour un apport identique de chaleur.

L'exemple facile suivant aidera lire les formules et montrera les ordres de grandeur.

Soit de l'eau liquide, recevant un apport de chaleur montant sa température de 10 K, disons de 263 à 273 K, à une pression normale. La chaleur spécifique de l'eau liquide est de $C_{p,l}$=75,2. La variation d'entropie est alors, selon ce processus considéré comme réversible :

$$\Delta S_{rev} = \int_{263}^{273} C_{p,l} \cdot \frac{1}{T} dT = 75,2 \int_{263}^{273} \frac{1}{T} dT = 75,2 \cdot \ln \frac{273}{263} = 2,81 JK^{-1}$$

Si, dans le sens inverse, on refroidit de l'eau solide, de 273 à 263 K sous les mêmes conditions, on exploite la chaleur spécifique $C_{p,s}$ de l'eau solide, (la moitié de 75,2, soit 37,6), et le logarithme du rapport (363/273) devient cette fois négatif. L'entropie vaudra la moitié (de signe opposé), soit -1,41 JK^{-1} ; on aura donc de cette façon réussi à la faire diminuer.

3.7.3 Le point de vue progressiste

Puisque ARISTOTE a écrit un Traité des corps flottants, on peut bien, nous, écrire un traité des corps coulants. Donc, poursuivant l'analogie, on dira que lors d'une transformation, le "fluide thermique" se meut, et "s'écoule". Dans ce cas, on devra cependant en appeler aux propriétés de l'état gazeux, la pression et le volume devenant pertinents : un coeur de pierre ne s'épanche pas.

Une transformation concerne en principe un seul corps, mais celui-ci en devient un autre, différent, et l'on peut alors considérer ce transfert comme des échanges entre deux corps, "A" devenant "B". Ainsi, lors d'un transfert de chaleur de A vers B, l'énergie thermique de J joules transmise répond à la relation S.T=J et donc S=J/T.

En restant simpliste, soit 1000 joules transmises (intégralement) d'un corps A se maintenant à 500K à un corps B se maintenant à 400 :

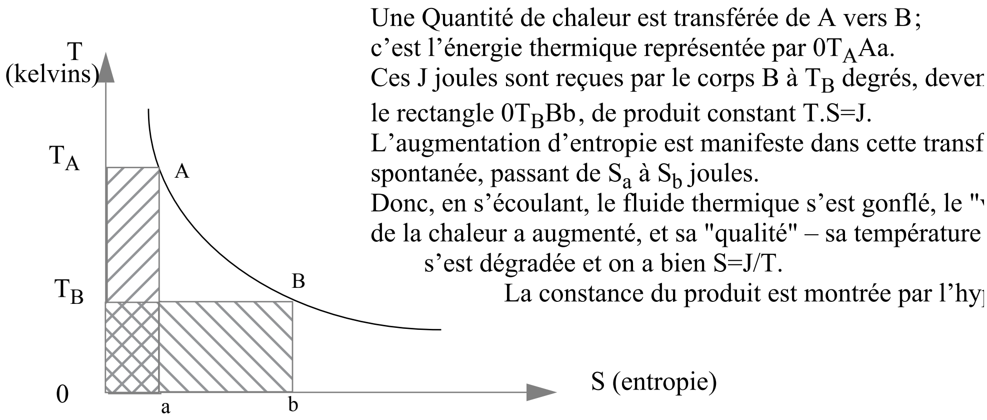
- L'entropie issue serait S=J/T = 1000/500= 2 ;
- L'entropie reçue serait 1000/400= 2,5 ;

La différence est donc de 2,5 JK^{-1}, qui est un accroissement d'entropie associé à l'irréversibilité. Notons aussi que cette valeur dépend du niveau de température, paramètre essentiel donc dans la variation d'entropie.

La vision graphique est alors bien celle d'une forme hyperbolique de la relation température-entropie, ce que montre la Figure 2 (de source DE RYCKER, op. cit.) où on "voit" la température baisser.

Un simple transfert (ici du plus chaud vers le plus froid) implique une conservation sur l'ensemble – donc l'entropie va devoir augmenter en conséquence.

Figure 2. Transfert naturel de chaleur entre deux corps en contact étroit



La chaleur échangée avec l'environnement Q_{irr} est égale à la variation de l'enthalpie de la transformation.

La température baissant, la "qualité" du fluide thermique se dégrade. Si l'on poursuit la correspondance avec les milieux bien informés, on dira que l'intensité de l'information se dégrade lorsqu'elle se... refroidit.

3.7.4 L'énergie enfin libre

$\Delta_i S$ n'est pas observable directement. Pour prévoir la spontanéité d'une transformation, l'introduction de S et de $\Delta_i S$ a une portée générale mais une application malaisée, la détermination du signe de $\Delta_i S$ nécessitant le calcul de ΔS et de Q_{transf}. Dès lors, on fait appel à des grandeurs dites dans les salons de thé "facilement accessibles", soit ΔF, $\Delta_r H°$, $\Delta_r U°$. Tu les connais, Marie-Ghislaine? Comme cela n'a pas l'air d'être le cas, la recherche d'énergie libre fera appel à l'enthalpie, la fine fleur de Thermidor.

Or donc, pour voir si cela marche tout seul (et dans quel sens), si la réaction est spontanée comme une larme de deuil, des savants ont mis leur nom sur des nouvelles fonctions d'état extensives, comme des échevins plaquent leur nom sur une rue. Le plus âgé d'entre eux est GIBBS, définissant la variation d'enthalpie libre G... (de GIBBS!) par:

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S$$

Comme $-\Delta G = \Delta_i S$, il suffit donc que G soit négatif pour que la réaction soit spontanée. Il y a donc un compte à régler entre la variation d'enthalpie (par apport de chaleur) et d'entropie, selon une description faite à la section précédente. Si G est positif, elle est spontanée dans l'autre sens – par exemple le deuil qui fait rigoler.

HELMHOLTZ, quant à lui, fait cela avec son "énergie libre" F (comme F...?), c’est-à-dire l’énergie U moins la quantité de chaleur transférée:

$$F = U - T.S$$

Comme $dU = \delta Q_{transf} - P.dV$, la variation est:

(a) $dF = - S.dT - P.dV - T.d_iS$

Si $dF < 0$, la réaction est spontanée, et il ne se passe rien si $dF=0$. Tant mieux.

Ces chaises étant disposées, on va pouvoir s’asseoir dessus pour voir comment s’exprime fondamentalement, et comment peut varier, l’entropie correspondant à l’information. Et puisqu’il paraît que cela pourrait dégager de l’énergie, autant essayer de savoir comment.

4 L’entropie statistique

4.1 La nature dans tous ses états

L’expression statistique de l’entropie se constitue dans le cadre de systèmes isolés; l’ouverture aux échanges avec le milieu extérieur ne se présente qu’ensuite. Une des clefs est la distinction entre deux états d’un système ; l’état macroscopique et l’état microscopique.

- L’état macroscopique est tel qu’il peut être décrit au moyen d’indicateurs accessibles à notre échelle, telles que le volume, la pression, la quantité de matière, le nombre de moles n, la masse de matière, donc les variables "d’état".

  Celles-ci forment aussi les contraintes d’état; par exemple, si la borne de l’entité est rigide, le volume interne est une constante; si c’est un isolé, c’est l’énergie qui est constante, et s’il est fermé, c’est le nombre de particules qui ne peut varier. De la sorte, on appelle "états accessibles" ceux qui sont compatibles avec l’état macroscopique donné. Il en résulte que, si nous voulons modifier l’entropie de l’entité – donc sa répartition des états – il faut trouver quel moyen d’action extérieur peut l’affecter, étant donnés les invariants qui lui sont imposés.

- L’état microscopique ne peut se définir que via un "modèle de", et concerne chacun des éléments pris spécifiquement. Ainsi, pour un gaz enfermé, il faudrait connaître à la fois le vecteur V^3 définissant la position et le vecteur de quantité de mouvement de chacune des particules, tandis que l’état macroscopique de ce même ensemble est défini par ses variables (P,V, E – énergie –, etc.). La physique quantique permet d’ailleurs de spécifier la borne inférieure du plus petit domaine qui puisse être considéré, lequel est en relation avec la constante de Planck, soit $h=6,26.10^{23}$ J.s.

  Les particules (ici d’indice i) peuvent être ou non discernables par leur niveau d’énergie, disons ε_i.

Soit un système à trois particules, x, y, et z, de niveau d’énergie macroscopique $E= 3\varepsilon$. Comme exemple réaliste, considérons une équipe de trois joueurs de tourniquet japonais, qui aurait gagné 3 Shios (les perles sont les shits de huitres):

- Si les joueurs sont indiscernables, il n'y a que trois états microscopiques accessibles, à savoir {3 ; 0 ; 0}, {2 ; 1 ; 0,}, {1 ; 1 ; 1} ;
- En revanche, si l'on distingue les particules – les joueurs et quel Shio chacun a gagné – il y en a 10, puisque, outre le {1 ; 1 ; 1,}, il y a 3 façons de faire {3 ; 0 ; 0,}, et six de faire {2 ; 1 ; 0}.

Dans un corps, il y a souvent beaucoup de particules (en milliards anciens), et il y a plusieurs paramètres pour les distinguer, par exemple, le fait que leur moment magnétique soit orienté ou non selon le champ magnétique, le spin quantique s=+1/2 ou -1/2, les quanta d'énergie (les niveaux quantiques), l'âge de l'ancien propriétaire etc. Soit Ω ce nombre d'états microscopiques du système ; dans l'exemple facile ci-dessus Ω=10, mais dans les descentes, en suivant AVOGADRO, on atteint facilement le 10^{34}.

L'"hypothèse micro-canonique" de BOLTZMANN est que pour un système isolé, tous les états microscopiques (désigné ici par π_s, d'indice "s" pour "state") correspondant à un état macroscopique donné ont la même probabilité.

Comme il faut bien que $\sum_s \pi_s = \pi_s.\Omega = 1$, il en résulte que $\pi_s=1/\Omega$, donc l'équi-probabilité de tous les états du répertoire ; ce serait 1/3 dans l'exemple ci-dessus si les particules – les joueurs japonais – sont indiscernables.

4.2 Expression statistique de l'entropie

L'entropie statistique d'un système contraint par un état macroscopique donné est définie par :

$$S = - k\sum_s \pi_s \, l_n \pi_s$$

La somme est prise sur tous les états microscopiques ; π_s a été défini précédemment, et "l_n" est le logarithme népérien. Cette somme a la métrique des probabilités qui la composent. Pour en faire une grandeur compatible avec les unités de la thermodynamique, BOLTZMANN la multiplie par le coefficient k, ce qui l'exprime également en joules par kelvin (quantité d'énergie transférée sur température absolue).

SHANNON & WEAVER (1940), puis BRILLOUIN (1950), n'ont pas retenu le coefficient k, et ont appelé "information" la quantité $l_n(1/\pi)$. Ils utilisent le logarithme en base 2, et définissent donc l'entropie de l'information par "H" (qui ici n'est plus l'enthalpie) :

$$\text{"H"} = -\sum_s \pi_s \, l_2 \pi_s$$

Comme $l_n x = l_2 x . l_n 2$, la relation entre les deux versions est :

$$S = - k_B . l_2 \text{"H"}$$

L'équi-probabilité implique $\pi_s=1/\Omega$, donc sous cette hypothèse $S= k.l_n\Omega$. Il en résulte aussi, mais on le savait déjà, que cette entropie est additive ($S=S_1+S_2$) pour les systèmes indépendants.

Elle est interprétée aussi en tant que mesure du "désordre", mais dans un contexte physique d’équi-répartition. Par exemple, l’entropie (statistique "de position") est maximale lorsque la répartition des atomes a et b d’un alliage a-b est égale (et nulle quand il n’y en a que d’une sorte), ou encore l’entropie (statistique "d’orientation") est nulle quand tous les atomes ont leur moment magnétique dans le sens du champ.

Plus proche de la préoccupation présente est l’hypothèse de BOLTZMANN suivante : pour un système isolé, l’état macroscopique est l’état le plus probable, ce qui signifie l’état pour lequel le nombre d’états microscopiques accessibles (le Ω ci-dessus) est maximal. Donc, la quasi-totalité des états microscopiques correspondent à l’état macroscopique le plus probable. Comme Ω est maximal pour un état de moment magnétique total nul, ou de répartition égale de positions, c’est vers cet équilibre que le système autonome va évoluer, donc d’entropie maximale, laquelle augmente avec kΩ.

Une convention, et aussi l’application formelle de sa définition, permet de constituer une échelle absolue de l’entropie, et donc des tables (pour des corps bien constitués) que l’on peut consulter pour les calculs. Cette convention est aussi qualifiée de troisième loi de la thermodynamique, à savoir qu’au zéro absolu (T=0K), l’entropie d’un gaz parfait est nulle : quand la molécule n’a qu’une seule configuration, Ω=1 et S=0.

Ceci augmente rapidement avec le nombre de configurations. L’exemple de la molécule de CO est familier : elle est asymétrique, et présente deux configurations. Comme dans une mole (un mollah ?) de molécules, il y a (depuis AVOGADRO) N_a molécules, il y a $\Omega=2^{Na}$ arrangements possibles. Dès lors :

$$S_0= k\, l_n\, 2^{Na}= 1{,}38.10^{-23}.\ 6{,}02.10^{23}\ l_n 2= 5{,}76\ JK^{-1}mol^{-1}, \text{ soit environ } 4{,}6.$$

Bien sûr, ce n’est qu’un petit point de départ, sans agitation thermique. Peut-être devrait-on commencer les exposés de thermotrucs par cette version statistique, au lieu de faire de la soupe de brouillard.

4.2.1 Aspect statistique de la création d’entropie "S_p"

On associe l’irréversibilité macroscopique (donc du corps entier) des transformations réelles à la création d’entropie. Il serait bon aussi de dire s’il se passe quelque chose de réel au niveau de la description fondamentale, celle des particules, ce qui rassurerait sur l’existence d’un phénomène réel de création d’entropie, au-delà de son expression algébrique.

Ainsi dans le cas de gaz – parfaitement extensible – l’entropie augmente lorsque le volume accessible croît ; on a parlé de cela plus haut on disant que le "volume" de la chaleur augmente lorsqu’on le laisse se répandre, ce qui est typiquement irréversible. Toutefois, au niveau microscopique on décrit des collisions élastiques entre des molécules, ce qui est du domaine mécanique et n’implique pas l’irréversibilité.

Le gag est que les particules qui entrent en collision auraient des mouvements que l’on qualifie de corrélés parce que la quantité totale de mouvement et d’énergie répond à des équations de conservation macroscopique. Dès lors, le nombre de degrés de liberté s’en trouve affecté d’autant.

Au cours du temps (pas long), deux phénomènes conduisent à la diffusion irréversible :

- Le premier est le grand nombre de chocs subis par les particules, ce qui disloque la contrainte de corrélation ;
- Le second est, après collision, la perte de rémanence des associations antérieures, qui fait que le facteur d'incertitude devient dominant. Ces deux facteurs conduisent à l'orientation vers l'état chaotique, où les corrélations sont perdues, et dès lors, par définition, à l'accroissement d'entropie.

Effectivement, en regardant de très près un système isolé, on voit que ces mouvements des molécules sont associés de changements d'états – par exemple de position, de niveau d'énergie – , donc que des particules passent d'un état r à un état s, (et tout autant de s à r) pendant une unité de temps différentielle, dt.

Pour exploiter cela, on peut faire comme la théorie de l'information. On exprime l'entropie statistique en remplaçant les probabilités d'états π_s par les fréquences relatives des particules dans l'état s, soit n_s/n, où n en est le nombre total, $\sum_s n_s$:

$$S = - k\sum_s \pi_s \, l_n \pi_s = - k\sum_s (n_s/n)\, l_n(n_s/n) = -k/n \sum_s n_s(l_n n_s - l_n n)$$

Désignons par $\pi_{r\to s} = \pi_{s\to r}$ les probabilités de transition d'état des particules ; dès lors :

$$dS = dt \cdot \frac{k}{2n} \cdot \sum_{s,\, r}[\pi_{s\to r}(n_s - n_r) \cdot \mathbf{l}_n n_s + \pi_{r\to s}(n_r - n_s) \cdot \mathbf{l}_n n_r]$$

Comme les échanges de $s \to r$ et $s \leftarrow r$ sont réciproques, on n'en fait qu'un double, soit :

$$dS = dt \cdot \frac{k}{2n} \cdot \sum_{s,\, r}\pi_{s\to r}(n_s - n_r) \cdot (\mathbf{l}_n n_s - \mathbf{l}_n n) = \delta S_p$$

On retrouve bien une entropie produite (S_p) positive (puisque chaque terme est positif), et ce d'autant plus que le chaos – le désordre – des particules est grand. Cela confirme bien les ragots sur l'entropie disant qu'elle mesure le désordre d'un système physique. Effectivement, on a vu que les mouvements internes, les multiples collisions, les diffusions d'énergie, engendrent nécessairement un accroissement des états et donc de l'entropie.

4.2.2 Relation entre l'entropie thermodynamique et statistique

a Thermo, macro

On peut à présent rechercher une relation entre l'entropie thermodynamique et statistique, en vue d'exprimer le rôle de l'énergie. Rappelons le premier principe, où U est l'énergie interne et Q la quantité de chaleur :

$$dU=\delta W+\delta Q,$$

Comme $dS = \delta Q/T$ et le travail reçu est $\delta W = -P.dV$, la différentielle de U s'écrit :

(b) $dU = TdS - PdV$

Cette relation est appelée l'identité thermodynamique.

En l'utilisant, la variation d'entropie d'un fluide peut s'écrire en fonction de l'énergie interne U et du volume V, soit:

$$(c) \qquad \mathbf{dS = \frac{P}{T} \cdot dV + \frac{1}{T} \cdot dU}$$

b Statistique, micro

On s'occupe maintenant des configurations d'état microscopique général, donc la répartition statistique. Soient n cellules dans le bidule, et soit b le volume d'une cellule:

- Le nombre de configurations de volume V distinctes de par les positions est:

$$\frac{(V/b)^n}{n!}$$

- Le nombre de configurations relatives aux vitesses et états internes des molécules dépend de l'énergie interne, disons par $\boldsymbol{f}(U)$.

Le nombre de configurations total Ω est dès lors le produit:

$$\left[\frac{(V/b)^n}{n!}\right] \cdot \boldsymbol{f}(U)$$

Pour s'alléger, on place les termes en b et n! dans une constante $K_{n,b}$. Celle-ci implique le nombre n et le volume b des molécules; elle dépend aussi de l'état quantique (niveaux d'énergie ε_i et le spin de s=+½ ou -½), mais tant pis pour elle, on la laisse comme ça. Comme a dit le roi de Prusse à Mozart: "Il y a trop de notes dans vos partitions".

Cela donne une entropie statistique en pièces détachées:

$$S = k.l_n\Omega = k[\ n.l_nV + l_n\boldsymbol{f}(U) + l_nK_{n,b}\ ]$$

Comme K est constant par rapport à la différentielle, on écrit en raccourci:

$$(d)\ dS = k \cdot \left[\frac{n}{V} \cdot dV + dl_n f(U)\right]$$

c Comparaison des deux expressions

La correspondance entre (c) et (d) se prend à l'heure, en tout cas si on peut se situer dans les gaz parfaits. En effet:

de PV=RT =knT, on tire: P/T=kn/V,

et dans ces gaz: $dl_n\boldsymbol{f}(U) = 1/kT$

Deux correspondances ont été ainsi réalisées:

- L'entropie macroscopique et microscopique;
- La variation d'entropie statistique en relation avec son aïeule thermodynamique.

Le prix à payer est d'introduire la constante de BOLTZMANN, et ne faire appel qu'aux relations valables dans le cas de gaz monoatomiques parfaits, ce que font les exposés didactiques de thermodynamique qui veulent vivre dans la paix, avec la conscience pure et rutilante des Filles de Marie jusqu'au samedi soir à 23 heures dix.

5 La néguentropie et l'information

5.1 La néguentropie et son interprétation

En introduisant les probabilités π_s des états, le correspondant en thermodynamique statistique du gain en information est la notion de néguentropie croisée, introduite artificiellement, et qui s'exprime effectivement par :

$$S^- = \Sigma\pi_{1s}.l_n(\pi_{1s}/\pi_{2s})$$

Dans ce cas, où l'on passe de l'état 1 à l'état 2, l'information est :

$$I_s = k.(l_n\pi_{1s} - l_n\pi_{2s}) = S_1 - S_0, \qquad \text{donc } S_1 = S_0 - I_s.$$

La néguentropie est en thermodynamique une fonction d'état (puisqu'elle est "-S"). Écrite comme cela, elle n'est pas compatible avec l'interprétation "volumnique" de l'entropie par DE RYCKER (cf. supra) ; en effet, on ne conçoit pas bien un "volume de la chaleur" qui soit négatif.

En revanche, elle peut répondre à un souhait déjà exprimé par Lord KELVIN (en 1868), où elle représente une forme de "disponibilité" d'énergie, un "potentiel", qui doit naturellement diminuer par déperdition ou dissipation quand le système en fait quelque chose. L'entropie, elle, donne l'idée opposée, puisqu'elle augmente dans ce cas. Donc, cette néguentropie pourrait être utilisée, selon KELVIN, à différente fins, en général celles qui sont associées à l'exploitation d'une concentration, une dégradation par un processus irréversible, comme une conduction thermique, un frottement, une expansion de pression. La (les) concentrations sont dans ces cas des différences de température (des "points chauds", comme sur la cuisinière), des zones de pression supérieure (comme dans le chauffe-bain électrique), ou encore de volume (la mousse à raser).

Dans What is life ? (Cambridge U.P., 1945), E. SCHRÖDINGER (l'Homo très Sapiens des équations quantiques) attribue aussi cette "concentration" aux aliments qui, chez les êtres vivants, permettent et compensent les dégagements dus à leur travail mécanique et aux dégradations de l'organisme. On retrouve bien sûr cet argument ailleurs, et fort bien dans Les origines de la vie, de J. DE ROSNAY, (1966), dont un extrait finit le "Tome du Levant".

5.2 L'interaction avec le milieu extérieur

Du point de vue de l'information, l'entropie est associée à l'information manquante sur la complexion réelle d'un système. Lorsque l'entropie est faible, cela implique une architecture instable, qui par le "second principe" va subir l'érosion de son potentiel dû à ses concentrations (de pression, de particules, d'énergie, de hauteur, de densité de probabilité, etc.), car celles-ci vont nécessairement se diffuser. Ainsi des séries de réponses à des questionnaires à choix multiples seront réparties au hasard, à moins d'un "travail" (mental, de transmission d'information?) qui les concentrent sur certains points ; les séquences de points-tirets en langage Morse vont perdre les groupements initiaux des lettres, pour devenir des séquences, des "runs" comme on dit en statistique, sans apparentements significatifs.

Ce que le second principe de la thermodynamique ne dit pas, c’est le temps d’"actuation" de ces processus à la finalité désolante – le temps de réaliser cette oeuvre "désagrégative". Cela peut se compter en fraction de temps infinitésimale ou galactique, selon l’objet. À notre échelle, c’est pendant ce temps pendant lequel l’information des concentrations (de densités de probabilité, de degrés de croyances) sont présentes, et peuvent être exploitées avant leur évanescence.

Ce temps-là serait celui du "stimulus" de la gestion.

Il faudrait donc, pour garder ce potentiel contredire la réaction spontanée, laquelle augmente nécessairement l’entropie interne produite, et alors que les transformations réversibles ne sont que des successions infinitésimales d’états d’équilibre. Pour réduire l’entropie – produire de la néguentropie – il faudra donc sortir le corps de son isolement, il lui faut un apport, un échange avec le milieu extérieur. Les processus candidats à cette fin qui seront palpés ici sont :

- Faire une transformation exothermique - par exemple par compression, dP;
- Apporter un travail, δW ;
- Réduire le nombre de particules, par dn;
- Concentrer les états (en associant les éléments, les molécules);
- Réduire l’agitation thermique (en refroidissant le corps, par δQ).

Reste à dire les formes d’apport extérieur, pouvant réduire l’entropie, qui ont une correspondance intéressante avec le gain en information – ce qui le but du parcours, mais sera plus flageolant.

5.3 La variation de néguentropie par les échanges

5.3.1 Variation d’entropie via la pression

Dans la liste des moyens explorés ici pour faire varier l’entropie – le but est de créer de la néguentropie, comme le fait le gain en information – le transfert de chaleur est un bon candidat, puisqu’on a montré qu’il affectait la répartition des probabilités d’état. Pour y contribuer par une intervention extérieure, la première approche sera ici via la pression.

Dans le cas de systèmes fermés (aux échanges de matière), mais pas isolés de l’énergie, des variations d’entropie sont associées comme suit aux transformations impliquent un transfert de chaleur:

- Exothermique: la variation d’entropie est $\Delta S < 0$,
- Endothermique: la variation d’entropie est $\Delta S > 0$;
- La variation d’entropie interne, $\Delta_i S$, reste toujours positive.

On va le voir facilement par deux transformations inverses, simples à effectuer à température constante:

- L'une exothermique (compression de 1 mol. de gaz), réversible;
- L'autre endothermique (détente de 1 mol. de gaz).

a Transformation exothermique (compression)

La compression implique évidemment que la pression finale P_F soit supérieure à la pression initiale P_I. Comme l'énergie interne se conserve, la quantité de chaleur est l'opposé du transfert de travail, et il suffit de rappeler que :

$$Q_{rév} = -W_{rév} = n.R.T.l_n(V_F/V_I) = -n.R.T.l_n(P_F/P_I)$$

Pour réveiller un peu les formules à coups de chiffres, soit par exemple une mole (donc n=1) de quantité de matière vautrée à T=300 K (27° C) ; dans ce cas :

$$Q_{rév} = -1728 \text{ joules}$$

La variation d'entropie est par définition : $\Delta S = Q_{rév}/T$, ou encore :

$$\Delta S = n.R.l_n(P_I/P_F) = -1728/300 = -5{,}76 \text{ JK}^{-1}$$

La production d'entropie est donc négative par le logarithme d'un rapport inférieur à 1, et on a réussi a créer de la "néguentropie".

Quant à la chaleur Q_{irr} échangée, elle vautpour cette compression exothermique :

$$Q_{irr} = -W_{irr} = P_F (V_F - V_I) = n.R.T.(1 - P_F/P_I) = -2493 \text{ J},$$

soit : $1/T.\ Q_{irr} = -8{,}31 \text{ JK}^{-1}$.

Mais à présent, la production interne d'entropie est :

$$d_iS = dS - Q_{irr}/T = -5{,}76 \text{ JK}^{-1} - (-8{,}31 \text{ JK}^{-1}) = 2{,}51 \text{ JK}^{-1}.$$

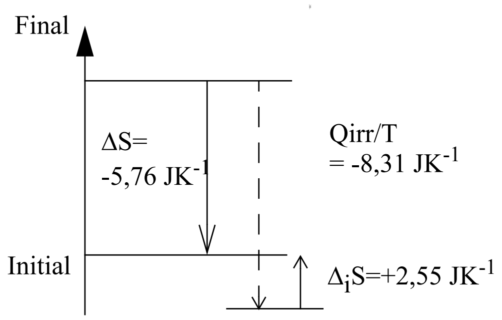
La production d'énergie libre est donc positive, comme annoncé, bien qu'il ait variation d'entropie négative due à la compression. Ainsi, on ne peut pas "impunément" réduire l'entropie – ce que fera la gain en information positif – sans payer un bakchichs en entropie au milieu informateur. Ce thème essentiel de cet exposé sera repris à la section 5, avec la collaboration de BRILLOUIN, concernant la création d'entropie par observation.

L'illustration de ce résultat numérique est portée à la Figure 3, conformément à sa source : « /fichiers/Hyper_notions/Chapitre_4/hn2chap4.html » du CD didactique Thermodynamique Chimique, par DAMON et VINCENS, Université Fourier, France.

Cette publication contient aussi le processus inverse de cet exemple numérique, c'est-à-dire une détente (endothermique) dans les mêmes conditions. Les valeurs obtenues y sont de signes opposés, et les auteurs, dans le tableau numérique et le graphique associé, concluent également à l'énergie libre positive, soit +2,55, ce qui n'est compatible ni avec leur calcul, lequel donne [5,76-8,31], ni avec le graphique présenté.

Cette référence illustre que bien des présentations de thermodynamique ont été associées de conventions d'école, rendues plus homogènes par la suite. Ainsi, en thermodynamique chimique on a convenu que le signe de l'énergie libre d_iS était positif, alors qu'en thermodynamique mécanique, ce qui intéresse l'ingénieur est le dégagement d'énergie (donc "libre", et non liée par la réaction) qui peut être exploitée, par exemple en vue d'un travail. La convention de signe n'a été unifiée qu'à la fin des années 80.

Figure 3. Énergie libre d'une réaction exothermique



De même, l'entropie définie initialement comme une grandeur fictive pour des processus réversibles (qui ne peuvent être réalisés), avait initialement le signe opposé dans la version statistique de SHANNON. Ceci a été "redressé" par BRILLOUIN dans le cadre de la théorie de l'information, avec le terme de "néguentropie", et c'est elle qui est associée au gain en information.

5.3.2 L'apport de chaleur et l'apport de travail.

La variation d'entropie dans sa version macroscopique par apport de chaleur et de travail seront comparée à présent à sa version statistique exprimant les répartitions :

$$dS = \delta Q/T = - k\sum_s d\pi_s \, l_n\pi_s = 1/T.\sum_s \varepsilon_s d\pi_s$$

D'où :

(a) $\delta Q = TdS = \sum_s \varepsilon_s d\pi_s$

D'autre part :

$$dU = \delta Q + \delta W = \sum_s \pi_s \varepsilon_s,$$

En effet, on n'oublie jamais que U est la valeur moyenne de l'énergie ε_s d'un état sur l'ensemble de tous les états s de probabilité π_s. D'où :

(b) $\delta W = dU\text{-}TdS = \sum_s \pi_s d\varepsilon_s,$

Ces expressions montrent donc la voie de modification de l'entropie compatible à la fois avec la version thermodynamique et statistique, donc celle de la théorie de l'information à la constante k de BOLTZMANN près. La confrontation de (a) et (b) apporte toutefois l'importante conclusion suivante, dans des conditions de transformations réversibles :

- Le transfert de chaleur (δQ) affecte les probabilités des états ;
- Le transfert de travail diminue l'énergie interne si la variation d'entropie est positive ; ce sont les niveaux d'énergie qui sont modifiés, et non les répartitions de populations de particules.

5.3.3 Diminution d'entropie par composition

a Composition d'éléments

La composition de molécules à partir de plusieurs autres amène à des concentrations d'états, donc à une diminution de leur multiplicité, et est donc un facteur de diminution d'entropie. PLANCK (l'Homo très Sapiens donnant son nom à la constante "h" en termes de fréquences) l'appelait le nombre de complexions, désigné de façon adéquate comme le nombre de compositions, d'"architectures" possibles d'une ensemble en interaction – ici un "système". Ainsi, si le système original a $\pi°$ complexions, en termes d'entropie statistique, cela donne :

$$S° = k.l_n\pi°$$

Si le nombre de complexions passe à $\pi^1<\pi°$, il en résulte

$$S^1 = k.l_n\pi^1 < S°$$

L'écart S^0- S^1= I_s, la diminution d'entropie, est associée, dans cette version, à un gain en "information", car on augmente la détermination du système.

Voyons-en à présent une correspondance thermodynamique. Pour l'illustrer de façon simple et concrète – comme toujours – on trouve ci-dessous deux transformations donnant (quasi) la même variation d'entropie, mais de signe opposé. Elles sont faites à la même température de la salle de bains (298 K, soit 25°) pour isoler discrètement le facteur de (dé)composition.

(1) Variation d'entropie standard associée à une réaction de décomposition de CaCO3 (du talc, c'est un solide) en $CaO_s + CO_{2,g}$ (oxyde de carbone, pas bon gaz). On gagne de l'argent à utiliser directement les tables d'entropie standard par mole de matière, et additionner leurs contributions dans un cycle de HESS élémentaire :

$$\Delta S°=S°(CaO)+S°(CO_2)-S°(CaCO_3) = 39{,}76+213{,}73-92{,}2 = 160{,}57\ JK^{-1}mol^{-1}$$

(2) Variation d'entropie standard associée à une réaction (à 298K) de formation de l'eau liquide $(H_2O)_l$ à partir de ses composés gazeux $H_{2,g}$ + ½$O_{2,g}$:

$$\Delta S°(H_2O)_l = S°(H_2O)_l - S°(H_2)_g - ½\ S°(H_2)_g = 69{,}87-130{,}64 -½\ (205)$$
$$= -163{,}3\ JK^{-1}mol^{-1}$$

La comparaison de (1) et (2) montre bien l'effet d'une diminution de complexion, qui est une façon élégante de réduire l'entropie.

Seulement, cela ne se fait pas tout seul ! En effet, l'entropie globale ne peut que croître $\Delta(S°-I)\geq 0$, c'est-à-dire que la somme de la néguentropie et de l'information peut rester nulle dans une transformation réversible, mais doit décroître dans une transformation irréversible, par application du deuxième principe de la thermodynamique. Il faudra donc extraire de l'environnement physique une contrepartie de cette néguentropie – et donc reparler de l'intervention d'un agent extérieur.

b Cristallisation

La diminution de la pression diminue le nombre de niveaux énergétiques, la cristallisation – qui amène en phase solide – correspond à une augmentation de l'ordre, donc à une diminution d'entropie. Cependant, il y a échauffement du liquide qui entoure le cristal (la solidification est exothermique) et dès lors un accroissement global (avec le milieu externe) d'entropie largement supérieur à la diminution locale due à la cristallisation.

c Analogie parlée

Ces considérations peuvent conduire à toutes sortes d'audaces analogiques concernant les Ensembles d'Activités Humaines, et bien des écrits sacrés de la littérature en font acte de foi. La clef en est bien sûr la meilleure "complexion" d'une organisation (humaine, à présent), et les vertus de leur non-désagrégation – ce qui revient aux différents arrangements possibles des concentrations et des diffusions, avec les vertus de leur "cristallisation" dans moins d'états plus concentrés.

Toutefois, la théorie des organisations humaines a le challenge difficile de devoir traiter ce problème simultanément de deux points de vue au moins, celui des pouvoirs et celui des opérations. Ce challenge dépassant évidemment les possibilités de la théorie des systèmes, il est confié aux gens raisonnables et expérimentés des sciences sociales.

5.3.4 Variation de l'entropie via le volume

Après la concentration, on peut explorer une diminution de l'entropie via un agent qui affecterait le volume. Le plus clair, comme toujours, est la variation d'entropie entre deux états, initial (I) et final (F), de gaz parfaits, avec C_v comme capacité thermique ($\partial U/\partial T$) à volume constant :

$$\Delta S = C_v \cdot l_n(T_F/T_I) + nR \cdot l_n(V_F/V_I)$$

Dans le cas isolé des apports thermiques, il reste :

$$\Delta S^- = -nR \cdot l_n(V_F/V_I)$$

- $\Delta(S^-)$ est négative dans le cas d'évolution réelle autonome – ce qui serait la détente ci-dessus, définie par $V_F > V_I$;

- $\Delta(S^-)$ serait positive en cas de diminution de volume (compression), ce qui correspond au gain en information positif.

5.3.5 Travail fourni au milieu extérieur dû à une compression

On obtient le travail W fourni au milieu extérieur comme diminution de la fonction d'état F d'énergie libre, soit U - T_0S. Si on reste gazeux et parfait à T^0, alors :

$$dF° = -PdV = -\ nRT^0.dV/V, \text{ soit :}$$

$$W_{trans} = dF° = nRT^0 l_n(V_F/V_I)$$

L'énergie interne n'a pas varié : le "gaz" a reçu de l'extérieur une quantité de chaleur égale à l'énergie transférée. Donc l'expansion du gaz transforme la chaleur en travail transféré.

L'autre voie utilisant le volume est la concentration (vue à la section précédente) où dV est négatif, ce qui transfère également de l'énergie libre à l'environnement.

5.3.6 Z et la sensibilité au niveau d'énergie

En thermodynamique, un thermostat ne se met pas dans le living pour créer une ambiance, mais est le living du corps. C'est le milieu séparé du corps par une membrane, et qui soit suffisamment volumineux pour sa température reste invariante lorsqu'il y a un échange d'énergie avec le corps. Un vestiaire de salle de judo est un contre-exemple. Une plage italienne au mois d'août est un cas limite, mais pour une larme versée sur la Banquise de ton coeur, celle-ci peut faire l'affaire.

Or donc, voilà des particules formant un corps, en équilibre avec un thermostat. L'intérêt se porte sur l'état énergétique de ce corps, que ce soit du point de vue macroscopique ou microscopique. Selon BOLTZMANN, la probabilité π_s de trouver un "système" qui, dans ces conditions, soit dans un état d'énergie ε_s, répond à l'expression suivante :

(a) $\pi_s = Z.\exp(-\beta\varepsilon_s)$

Dans cette expression, β est l'inverse de la constante de Boltzmann, soit $\beta=1/kT$.

Pour une fonction de répartition statistique régulière, il faut bien sûr que $\sum_s \pi_s=1$, où la somme concerne les états, et non l'énergie. La constante Z en est donc le facteur de normalisation, soit :

$$Z = \sum_s \exp(-\beta\varepsilon_s),$$

Cette fonction Z appelée fonction de partition de l'énergie, pour des états différenciés.

Et c'est là qu'on peut voir, comme a dit Victor HUGO sur son lit d'agonie, "une grande lumière noire". En effet, l'intérêt se porte sur les différences de probabilité des états – qui correspondent aux différences de contenu en information. Lorsque deux corps se trouvent dans des états d'énergie différents, disons ε_1 et ε_2, à une température T, alors le rapport des probabilités de ces états est, utilisant (a) ci-dessus,

(b) $$\frac{\pi_2}{\pi_1} = \exp\left(-\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{k_B T}\right)$$

La lumière noire sur cette question est fournie par la sensibilité des probabilités des états aux variations d'énergie. Mais, on va le constater ci-dessous, les rapports sont si faibles que ce n'est qu'une lanterne pour éclairer le soleil.

Comme les gens s'informent généralement à la température ordinaire, disons d'un Saint-Émilion chambré, soit 27° ou 300K, la constante k_BT y est de l'ordre de $1/40^e$ d'électron-volt. Or la différence entre deux états d'énergie dans un atome normalement constitué et en bonne santé donne quelques électrons-volts – disons 5 puisqu'on ne peut pas le contredire facilement. Le rapport des deux est donc de l'ordre de 5/(1/40) soit 200.

Dans ce cas de figure, l'expression (b) donnerait arithmétiquement :

$$\pi_2 = \pi_1 . e^{-200}$$

Ce résultat est effrayant : il voudrait dire que les états d'énergie supérieure (π_2, par exemple excités par un rayon laser) sont de probabilité d'un ordre de grandeur dérisoire par rapport aux états d'énergie fondamentaux. Donc l'état d'énergie la plus faible, correspondant à l'entropie la plus élevée et l'information la plus diffuse, a la probabilité d'état maximale, et une "rumeur énergétique" a un effet relatif considérable sur la probabilité d'état de chaque élément.

Toutefois, cet impact est ponctuel – ce calcul ayant pour objet une particule. Lorsque les éléments sont nombreux, l'espérance mathématique (c'est $-\partial l_n Z/\partial\beta$) de la variation est peu sensible (sa variance est fonction de 1/n), où n est le nombre de particules. Il faut un apport d'énergie élevé pour la sortir de sa sieste – conduire le corps hors de l'équilibre. Reste à savoir quelle énergie peut lui être apportée ou produite : de la chaleur ? Du travail ? De la motivation ? De l'amour ?

Et voilà le genre de choses que, bien que fondamentales, on ne retrouve qu'au détour de nombreux lacets de raisonnements tordus, après avoir traversé une jungle inextricable de mots exotiques, passé des rivières de notations sans gué, grimpé des falaises vertigineuses de niveaux d'énergie, et s'être tapé des enfoirées de formules.

5.3.7 L'"exergie" pour les systèmes (physiques) ouverts

Soit un système physique ouvert en relation avec le milieu extérieur, à une température ambiante T°, et sous une pression P°. Lorsque ce système est en équilibre avec le milieu ambiant :

- L'énergie E, le volume V° et l'entropie S° correspondent à celles du milieu ambiant ;
- L'énergie E est l'énergie macroscopique ($\varepsilon_k^M + \varepsilon_{p,ex}$) + l'énergie interne U.

Les énergies ε_c^M, $\varepsilon_{p,ex}$ sont respectivement les énergies cinétique et potentielle extérieure. Un exemple de $\varepsilon_{p,ex}$ est celui où le système est soumis à un champ, par exemple de pesanteur, ou électrique :

- Dans le cas de la pesanteur, l'énergie potentielle extérieure vaut m.g.z, où z est l'altitude, m la masse et g la constante dite "de gravité", c'est-à-dire l'intensité du champ de pesanteur ;
- Elle serait q.v pour le champ électrique, où q est la charge et v (en volts) la différence de potentiel.

La grandeur qu'on avait promis d'essayer de faire apparaître est une forme de production d'énergie libre – de travail – associée aux variations de conditions, par rapport à un état initial, telles que celles qui viennent d'être parcourues du point de vue de leur effet sur la variation d'entropie. Cette exergie est désignée par E_w, où le "w" tient pour "work" en anglais, c'est-à-dire le travail. Elle est définie par l'énergie macroscopique plus l'enthalpie libre (de GIBBS, G), soit :

$$E_w = \varepsilon_c^M + \varepsilon_{p,ex} + G° + K°$$

La constante K° sert à la rendre nulle dans la situation d'équilibre avec le milieu ambiant.

On se souvient de l'enthalpie libre, pour T° et P°, qui s'écrit:

$$G° = U + P°V - T°S,$$

L'exergie fournie sous forme de travail est alors:

$$E_w = \varepsilon_c{}^M + \varepsilon_{p,ex} + P°V - T°S + K°$$

Elle est plus facile à lire comme:

$$E_w = (E-E°) + P°(V-V°) - T°(S-S°)$$

Et voilà. L'expression du travail maximal qui peut être fourni au milieu extérieur en passant de l'état initial (ambiant) à l'état final du système fermé à masse constante, à savoir $[\delta W_f]_m$, est la diminution de son exergie.

Dans une transposition de thermodynamique à l'information proposée par BRILLOUIN (op. cit.) ce travail se situe dans la transmission d'information, et il est lié au désordre et à l'agitation thermique. Chacun peut accepter d'exploiter cette assertionà sa façon, par exemple en l'appliquant à la harangue des foules en chaleur, au pouvoir des slogans ou, au contraire, au viol de la crédulité par une "intox" bien distillée.

5.3.8 Les milieux ouverts aux particules

a Courants de particules

On fait une soupe d'entropie en l'exprimant en fonction de variables extensives, telles que l'énergie interne (U), la charge électrique (q), le volume (V). Un vrai milieu ouvert, qui fait des échanges avec le milieu extérieur, échange non seulement diverses formes d'énergie, mais aussi des particules; il faut alors ajouter aux fonctions d'état ce nombre n, ou éventuellement le nombre de moles, ou la masse du système considéré. Il convient donc de prédire le sens du courant des particules; celui-ci est associé au potentiel chimique.

On appelle potentiel chimique μ du système les expressions des grandeurs intensives associées au nombre de particules, à savoir les dérivées partielles des fonctions d'état U, H, F, G, par rapport à n, les autres variables d'état étant constantes:

$$\mu = (\partial U/\partial n)_{S,V} \ ; \ \mu = (\partial H/\partial n)_{S,P} \ ; \ \mu = (\partial F/\partial n)_{T,V} \ ; \ \mu = (\partial G/\partial n)_{T,P}.$$

Ce potentiel s'interprète comme l'énergie nécessaire pour faire varier le nombre de particules d'une unité.

Donc, une entrée-sortie de particule - un élément d'état – est d'autant plus facile que le système les propriétés:

- - Moins de concentrations;
- - Moins d'accumulation de particules;
- - Moins de densité (et/ou + plus de volume);
- - Moins d'énergie interne.

On dispose alors de la variété des expressions du bilan énergétique, à savoir la description du premier principe – celui de la conservation de l’énergie – de la thermodynamique :

- $dU = -PdV + TdS + \mu\ dn$
- $dH = VdP + TdS + \mu\ dn$
- $dF = -PdV - SdT + \mu\ dn$
- $dG = VdP + SdT + \mu\ dn$

Et à présent, on peut définir l’entropie en fonction du potentiel chimique :

$$dS = 1/T\ (dU + P.dV - \mu.dn)$$

Donc μ peut s’écrire en fonction de l’entropie $\mu = -T(\partial S/\partial n)_{U,V}$

Comme l’entropie produite δS_p est positive, il en résulte que, si deux milieux adjacents permettant les échanges sont de température et volume constants, celui de potentiel chimique le plus élevé va transmettre des particules à l’autre :

$$(\mu_1 - \mu_2)\ dn_1 \leq 0$$

Cette expression montre bien la... différence de potentiel – la tension en électricité – et dès lors le sens du flux. C’est si tentant qu’à la section 6 on tombera dans le piège de l’analogie en faisant correspondre aux particules le nombre d’éléments d’information, et à la tension la différence entre le potentiel informateur et récepteur.

b L’entropie additionnelle

L’entropie est extensive, par définition elle croît avec le nombre de particules, chacune apportant des états possibles en fonction de ses niveaux énergétiques. C’est donc le moment de voir ce qui arrive à l’entropie quand on laisse entrer et sortir quelques particules, disons une variation de masse entrée δm_e, et de masse sortie δm_s. Ces deux collections n’ont pas la même entropie, de sorte qu’il faut les distinguer, respectivement par S_e et S_s. Comme l’entropie est additive, il suffit de compléter l’entropie du système fermé par le bilan entropique des masses échangées, désigné ici par $[S\delta m]$.

L’expression classique de la variation d’entropie s’est alors tout simplement enrichie par ces petits trafics, devenant :

$$dS = dQ/T + dS_p + [S\delta m]$$

c L’énergie libre et le travail fourni

Lorsqu’il y a échange de particules, on ajoute à l’énergie libre fermée, déjà familière, le bilan énergétique des masses de particules entrées et sorties, soit $[\varepsilon\delta m]_s^e$:

$$[\delta W_f]_m = - dE_w + [\varepsilon\delta m]_s^e$$

Ceci complète le travail qui peut être fourni à l’extérieur par le nouveau potentiel dû à l’ouverture du système.

6 Synthèse de la relation thermodynamique-information

6.1 Le point de vue macro-statistique et les relations extérieures

6.1.1 Propriétés générales

- Les "états" auxquels sont associées des masses de probabilité sont des états de la matière ; ils correspondent à des "états de la nature", et ne sont pas des événements aléatoires pouvant affecter des comportements;
- Les probabilités sont fondées sur des fréquences relatives d'états ;
- L'information ne veut rien dire ;
- L'information est associée aux modifications des masses de probabilité ;
- La néguentropie y correspond à l'information indifférente, qui n'affecte que certaines propriétés des répartitions, essentiellement des concentrations ;
- Cette information se moque de l'énergie (de la température, de l'intensité) et des aspects microscopiques, alors qu'elle est fondée sur la version statistique de l'entropie qui, elle, est construite à partir des particules et de leurs niveaux d'énergie ;
- L'incertitude est associée à l'information manquante ; elle mesurée par l'entropie statistique, et concerne un objet qui est indifférent. Elle peut être mise en correspondance avec l'entropie thermodynamique en passant par la définition microscopique ;
- L'entropie dans sa version "volumnique", selon DE RYCKER, n'est que didactique, ce qui a ses vertus dans un exposé. L'interprétation "volumnique" ne se prête cependant pas à celle de la néguentropie. Dans cette dernière version, la température donne la "qualité" de la chaleur, mais ici (à la section 5.4.2) on en proposera plutôt l'intensité.

6.1.2 La réversibilité

La définition thermodynamique initiale de l'entropie exploite la réversibilité ; celle-ci a cependant des implications différentes selon le contexte :

- Dans le cas des équations dynamiques, la réversibilité implique qu'elles restent invariantes par changement de la variable temps de t en -t ;
- Dans le cas mécanique d'un un milieu élastique, elle implique que l'on peut retrouver sans perte une forme un volume initial ;
- En thermodynamique, la réversibilité d'une transformation impliquerait de ramener le système dans l'état précédent sans perte d'énergie dans les deux sens. Or cela ne se fait pas et ce, pour deux raisons :
  - D'abord, la réversibilité y est une fiction décrite par une succession d'états d'équilibre "différentiellement" proches ;
  - Ensuite, l'information n'est pas "réversible". On peut, par un "gain en information", amener par opération une répartition des probabilités à être moins diffuse, donc de moindre entropie. On peut ensuite déconcentrer les probabilités, et ramener l'état à la même mesure d'entropie ; cependant, cette opération "inverse" ne

> ramène pas nécessairement la répartition initiale, c’est-à-dire ne remet pas les mêmes masses de probabilités sur les mêmes événements ou états de la nature. Ce serait d’ailleurs un très grand hasard que cela retombe pile dessus : c’est très difficile à faire exprès, et il y a beaucoup de répartitions qui donnent la même entropie.

L’information n’est pas réversible car elle n’est pas "oubliée", mais est fournie par deux apports irréversibles dans des sens opposés, lesquels augmentent nécessairement l’entropie totale de l’ensemble formé par l’objet informé et son environnement informateur et ne ramènent jamais à l’état initial. Cette augmentation nécessaire de l’entropie produite est due à l’interaction avec le milieu – ce dont on va reparler dans le cadre des échanges.

6.1.3 Diminution de l’entropie - apport d’information

L’évolution spontanée d’un milieu isolé augmentant nécessairement l’entropie, il faut un échange avec un milieu extérieur pour réduire celle-ci. Dans l’approche macro-statistique les modes suivants d’apport de néguentropie ont été mis en évidence :

- Refroidissement (sauf par "désaimentation" isentropique) ;
- Variation du nombre de particules n ;
- Variation de pression ;
- Variation de volume.

Bien que dans la manipulation arithmétique et indifférente de l’information on accepte ces manipulations des masses de probabilité "dans les deux sens", celles-ci ne sont pas justifiées par une réversibilité, ni en thermodynamique, ni en information.

6.1.4 Validité et applications en science et en gestion

Le point de vue macro-statistique de la théorie abstraite de l’information a permis les développements importants présentés aux première loges par SHANNON (1940), BRILLOUIN (1950), H. THEIL (1967), et YAGLOM & YAGLOM (1971), repris en bibliographie. En gestion, elle permet de faire de la gymnastique sur les parts relatives avec de mesures efficaces, comme on l’a fait ici. Toutefois, quel que soit le domaine d’application, sans sa théorie physique, thermodynamique, elle n’est pas cohérente. Tant qu’elle reste une quantité abstraite, inobservable et non-mesurable, elle n’aurait pas, selon une affirmation de BRIDGMAN, d’"existence scientifique réelle".

En ce qui concerne la gestion, les propriétés générales, et celles sur la réversibilité qui viennent d’être citées, définissent également la portée et les limites des apports de la théorie formelle de l’information en gestion, avec pour contribution directe essentielle les mesures qu’elle fournit. Les sections 1 et 2 de cet exposé en ont montré des applications utiles, mais en rappelant bien l’indifférence, l’absence d’acteur et d’"intention". À la section suivante, la levée de cette hypothèse d’indifférence, et l’entrée en lice d’un agent – d’un "acteur" – va donner sa subtilité et sa justification à l’approche des échanges et des relations thermodynamiques internes au système.

6.2 Le point de vue des interactions et des relations intérieures

6.2.1 Le problème posé

Le problème posé dans cette deuxième section est le suivant : le processus d'information n'étant pas plus réversible que le voeu de chasteté d'une Soeur Carmélite, le deuxième principe de la thermodynamique impose une entropie croissante, alors que, si on gagne des masses de probabilités sur certains états (au détriment d'autres), on diminue l'entropie S par concentration. La réflexion sur ce problème – ce paradoxe ? – conduit à montrer, que ce soit en général ou dans l'optique de l'information de gestion, la nécessité de considérer les interactions et les échanges, lesquels sont décrits et gérés par les relations de la théorie thermodynamique. Leur transposition analogique en gestion prendra cependant son envol vers la science-fiction...

6.2.2 Propositions de L. BRILLOUIN

Une proposition de Léon BRILLOUIN (La science et la théorie de l'information, Masson, Paris, 1956, p.151 et 221) est que l'apport d'information – la néguentropie – est une interaction qui par elle-même engendre un accroissement nécessaire qui est l'entropie produite (celle qui est écrite S_p dans cet exposé), ce que dit l'extrait suivant de son argumentation :

« Cet accroissement d'entropie est supérieur à l'information obtenue lorsque ces grandeurs sont mesurées dans le même système d'unités" (souligné ici) ». « La comparaison entre cet accroissement et le montant d'information obtenue donne le rendement de l'information, toujours inférieur à l'unité pour le système et son milieu de par le principe de dégradation généralisé sur le système couplé :

$$\Delta I \leq \Delta S_i$$

Le coût en entropie ΔS d'une observation doit donc être négligeable devant l'entropie totale (S_Ω) du système observé, soit : $\Delta S_i << S_\Omega$ ».

Il en résulte donc, dans les notations de cette section :

$$\Delta I \leq \Delta S_i << S_\Omega$$

La relation entre le fait de l'observation et la perturbation de son objet paraît, chez BRILLOUIN, inspirée de la théorie quantique où les états des particules sont affectés par le fait de l'observation. Cette voie pour élucider le problème de l'entropie produite et le travail demandé par la transmission ne sera pas suivie ici. Cependant, elle inspire quelques transpositions audacieuses sur l'information en milieu de gestion.

6.3 L'infotropie dans le domaine de la gestion

Appelons ici "infotropie" l'information définie au sens de SHANNON, qui puisse se mesurer par l'entropie et ses dérivés. La transposition de cette infotropie dans le domaine de la gestion, au-delà de l'arithmétique des mesures de probabilité, demande d'apporter les aménagements suivants – proposés ici sans mettre en cause des auteurs respectables.

Dans le domaine de la gestion, le récepteur de l'information est un agent; pris dans une situation qui implique de l'incertitude, une variété de choix, une préhension des faits et des événements orientant la connaissance, et l'ensemble le conduisant à d'éventuelles options, ou même prise de décisions. Il est donc récepteur et acteur.

6.3.1 L'agent est un récepteur

Le mot situation implique par définition une interaction avec un environnement. Celui-ci correspond à ce que la thermodynamique considère comme le milieu extérieur au "système" sous revue. En gestion, cependant, ce milieu a lui aussi des agents, des sources d'information, et ces sources ne sont pas nécessairement indifférentes au fait de "libérer" de l'information en faveur du récepteur.

Ce point de vue fait l'objet d'un exposé spécifique : « Entrevue avec l'information », situé dans le Tome Sud. Pour l'heure, le rapport avec la thermodynamique propose ceci :

- L'échange (entre le récepteur et un "environnement") se définit par une dissymétrie :
  - D'une part, le récepteur participe à un processus d'échange, qu'il initie en faveur de sa propre néguentropie. L'effet espéré de l'information est une diminution de la mesure d'incertitude par l'exclusion d'états ou par une moindre variance de la répartition des masses de probabilités ;
  - D'autre part, la concentration de masses de probabilité sur des états potentiels dans le "système" (récepteur) entraîne une diffusion hors de ses bornes. C'est comme si la concentration, laquelle diminue donc l'entropie statistique, transférait le désordre, la dégradation de l'énergie, vers l'environnement. Ceci conduit, en accord avec la proposition de BRILLOUIN, à une augmentation de l'entropie totale, due à la transmission, au processus irréversible de transformation.

L'hypothèse de cette dissymétrie est que le milieu extérieur est suffisamment vaste pour que son entropie ne soit affectée de façon non-significative. La relation récepteur-source d'information est celle d'un agent récepteur et d'un "environnement", caractérisée par une relation "one-to-many", du type entité face à un (vaste) réseau.

Si le récepteur est puissant, et si le fait de modifier son information a un impact lourd, la situation de dissymétrie n'est plus valable, bien sûr. La problématique est alors différente, et se prête mal au cadre restrictif de la relation information-thermodynamique

6.3.2 L'agent est acteur

Le "modèle" suivant, qui décrit des relations analogiques entre l'information d'un agent spécifique et la thermodynamique vise à connecter certains aspects de l'incertitude en gestion.

- Dans l'approche dite classique, les probabilités objectives, fondées sur les fréquences relatives et les masses de probabilité objective, sont situées "dans l'environnement" et non dans le chef du sujet. Donc des choses, des événements peuvent arriver, se réaliser, ou devenir plus ou moins probables, et l'agent ne serait qu'un récepteur passif, un récepteur accroché quelque part dans ces champs turbulents de l'information, lesquels lui injectent ou lui prélèvent de l'entropie sans qu'il puisse la maîtriser.

- Dans l'approche statistique non-classique, préconisée par SAVAGE, l'agent n'est pas qu'un observateur indifférent. À ses perceptions du possible et de l'incertain, il associe des probabilités subjectives, c'est-à-dire des degrés de croyance. Cette approche intervertit dès lors la situation de l'incertitude dans le chef du sujet (celui qui croit) et de l'objet (de la croyance). On a donc à présent un sujet qui a des "états d'âme", et subira les tourments de la gestion. La suite opérationnelle qui y est donnée est la théorie bayesienne de la décision, largement reprise en gestion et évoquée dans l'exposé « Vers le Décideur artificiel ». De la sorte, un "système" intégré vers la gestion commence à prendre forme.

À présent, l'idée est d'associer, comme il est annoncé dans le projet de cet exposé, les modifications des degrés de croyance et l'exergie, et donc susciter un comportement. À cette fin, on reprend ci-dessous le mode de fabrication de cette exergie fournie sous forme de travail (E_w), situé dans la section 5.3.7, où ses conditions de validité ont été signalées :

(a) $E_w = (E\text{-}E°) + P°(V\text{-}V°) - T°(S\text{-}S°)$

Les notations sont familières : P-pression, V-volume, E-énergie, et S-entropie ; le suscrit "°" indique les états de référence.

Sur cette base, les audaces du modèle implique les correspondances suivantes, selon les variations exprimées dans les trois termes de (a) rétrospectivement :

a Entropie-enthalpie

- La différence d'entropie (S-S°) est de la néguentropie fournie par l'environnement, issue des variations des masses de probabilité ; cette transaction produit une entropie "libre" (désignée par S_p dans l'exposé), relâchée dans cet environnement qui a répandu de l'information ;
- La température T est de l'intensité appliquée aux degrés de croyance subjectifs ;
- L'enthalpie H, intégrale de la chaleur apportée, contribue à libérer de l'enthalpie libre de GIBBS ($\Delta G = \Delta H - T\Delta S$), et donc à l'exergie.

b Pression et volume

Le deuxième terme est le plus "élastique". Il correspond typiquement aux variations des états potentiels, soit du fait d'une diminution de volume, du nombre de particules ou d'états, ou du fait de la diminution de pression.

c Énergies

<u>L'énergie cinétique</u>

Le premier terme est celui de l'énergie interne. Il est écrit selon la différence E-E° par rapport à l'état standard, et vient de $\varepsilon_c^M + \varepsilon_{p,ex}$, désignant l'énergie cinétique ε_c^M associée à la masse M, plus l'énergie potentielle $\varepsilon_{p,ex}$ associée aux champs subis par le sujet et issus de l'extérieur.

L’énergie cinétique est une composante de l’énergie interne U, associée en théorie microscopique aux vitesses des particules, aux transitions internes, aux collisions, à une agitation. C’est là que se situe la perte des corrélations, multipliant par là le nombre d’états possibles Ω, et donc l’entropie statistique $S(\Omega)$. Ces turbulences contribuent au dégagement de l’énergie libre F de HELMHOLZ rappelée ici de la section 3.7.4, soit

$$dF = dU - T.dS - S.dT$$

Dans la transposition à l’infotropie et aux acteurs en gestion, l’analogie conduit à considérer cet aspect d’agitation comme les "champs turbulents" internes cette fois, des nuées dynamiques qui hallucinent le cerveau et lui donnent des simulations, donc transmettent l’information en énergie livrée à la fonction de penser.

Voilà qui peut affecter des comportements du sujet, mais du calme, s’il vous plaît. Les agents – et les Ensembles d’Activité Humaines – ne sont pas toujours hagards et disloqués par les turbulences et ce, que, grâce à deux propriétés :

- La discrimination, lui permettant de filtrer et ne pas prendre tous les courants d’air pour de la véritable information ;
- La résilience, qui est l’aptitude d’un système à absorber des perturbations dans ses variables d’état ou ses paramètres sans disparaître ou changer de régime dynamique. Donc, rester cool, voilà ce qu’a toujours dit LAO T’SEU, qui semble avoir déjà ressenti que ces propriétés de discrimination et de résilience sont celles que l’on voudrait associer à l’"art du jugement".

L’énergie potentielle

L’énergie potentielle est représentée par le terme $\varepsilon_{p,ex}$ dans les composantes de l’exergie. Elle a été citée en 5.3.7, avec pour exemple "q.v" pour le champ électrique, où q est la charge et v (en volts) la différence de potentiel.

Celle-ci est typiquement représentative de la situation d’un acteur dans un environnement qui crée une "tension", exprimée par un ensemble de grands écarts entre les niveaux d’incertitude basse de l’agent, et des possibilités élevées (proches de un) d’arrivée de messages signalant l’arrivée d’événements peu fréquents. La "charge" est valablement représentée par le nombre (et la variété) des états potentiels considérés par le récepteur, tandis que la tension est l’écart entre une possibilité élevée et la rareté.

On peut rendre cette version attractive par des exemples à bon marché ; ainsi, certaines périodes sont privilégiées par les "médias" pour entretenir dans le public et les pouvoirs publics une vigilance, un "affût" vis-à-vis d’événements dont l’impact peut être important. Il en est ainsi des messages médiatisés sur des actions terroristes, une épidémie, un crash financier, une défaite au football etc. À la limite, on parle de "psychose de", mais de telles envolées sont trop grandioses pour les considérations mesquines de cet exposé, lequel ne veut mettre en cause que des petits récepteurs de la paroisse...

– Chérie, avons-nous de très bonnes relations sexuelles ?
– Mais oui, enfin, tu le sais bien...
– Bien, bien... Alors, si on les invitait pour jeudi ?

6.3.3 A qui profite l'exergie ? Au "processus de gestion"

À qui profite l'énergie produite, l'"exergie" ? C'est très simple : elle est fournie aux attracteurs et répulseurs, donc affecte la téléonomie et, partant, oriente les comportements. Alors que l'information est par essence indifférente, lorsqu'elle est transmise à une situation téléonomique, elle devient "stimulus", et peut engendrer une motivation.

La cohérence avec le "processus de gestion", que l'on avait prophétisée, est bouclée de la sorte, mais avec quelques recettes de charlatan que Deuxième Oncle va vilipender dans le « Baiser Chinois ». En attendant qu'il se prépare, voici quelques exemples un peu oiseux, mais qui font prendre patience aux Lectrices qui en ont.

6.4 Exemples métaphoriques d'infotropie en gestion

a Turf-Turf

Une situation dans laquelle un agent "mise" sur des événements probabilistes est une illustration typique des correspondances tentées ici. Dans le cas du Turf – c'est-à-dire les courses de chevaux – on peut les suivre presque pas à pas :

- Les "tuyaux" concentrent les probabilités chez le récepteur, mais dégagent de l'entropie produite auprès de la source qui "répand", au sens propre, son information ;
- On y ressent aussi l'enthalpie chez les récepteurs, le public et les parieurs, par les échauffements accumulés et qui lâchent à certains moments choisis de l'énergie libre de HEMLHOLZ ;
- Le champ de tension, associé à l'énergie potentielle, dont la charge est plus élevée par le nombre de porteurs d'information, et la tension est représentée par les écarts entre d'une part les probabilités statistiques de succès des canassons et d'autre part les "degrés de croyance" de l'agent parieur. Il est remarquable d'ailleurs que la gestion en ait fait une mesure propre, le rapport de chances ("odds" en anglais), dont la "cote" est l'unité.

b La Bourse ou la vie

Dans le cas de la bourse (ou des petites coupures, pour les eunuques), la panoplie disponible dans l'exposé pourrait être invoquée comme suit.

- Le rôle de la néguentropie, fournie par les informateurs (agents particuliers ou institutionnels), est de focaliser ou de concentrer l'information sur des titres, et à ces vagues correspondent des variations de la "cote" ;
- D'autre part, la transmission elle-même engendre une entropie "produite" (S_p), qui fait que progressivement les perspectives offertes par des titres sont de moindre densité et n'engendrent plus d'intérêt – d'exergie ? Cela peut se passer dans la même séance, ou en plusieurs semaines, le modèle ne donnant pas de "timing";

...Attendre l'arrivée de l'oiseau – Attendre des années s'il le faut
La vitesse ou la lenteur de l'arrivée de l'oiseau
N'ayant aucun rapport avec la réussite du tableau

Jacques Prévert: "Pour faire le portrait d'un oiseau"

- La "tension" est aussi perceptible lorsque court la rumeur de l'inattendu, et sa "charge" peut être assimilée au nombre de transactions (indicateur d'ailleurs utilisé par les publications professionnelles), ce qui engendre les collisions, les vitesses... l'énergie cinétique ε_c^M;
- Enfin, le Lecteur est sûrement assez bon sportif de la thermodynamique pour enjamber de soi-même les ponts entre le "délit d'initié" (qui exploite les tensions des lits d'initiés), l'agiotage (qui les crée ou les amplifie), et le fric qu'il aura perdu dans cette galère.

c Le Notaire du Havre

Le Notaire du Havre est le titre d'un beau livre de Georges Duhamel. Il fait part des "espérances" d'une famille attendant l'oeuvre de bienfaisance issue du décès d'un parent très fortuné. C'est une lettre du Notaire du Havre qui doit leur faire part – si l'on peut dire – des retombées de l'issue fatale de leur légataire. Tandis que ce courrier se laisse désirer (pendant des semaines), la vie du ménage est stérilisée par cette fin de non-recevoir – pour l'instant. Mais, pendant ce temps, que de sauts de probabilités, de variations d'entropie, que d'énergie potentielle, de tension, de chutes de pression néguentropiques, de variation de volume, de masse, bref, que de jeux et de mauvais tours leur a joués l'information!

d La prédiction et l'intox

L'information prédictive a également ses vertus d'exergie. C'est une évidence qu'elle oriente les comportements, et elle sert même à cela. Plus fin, cependant est l'effet de contradiction: ainsi apprendre qu'il y aura beaucoup (trop) de monde à telle manifestation peut y faire renoncer beaucoup de candidats et, de ce fait, il y en aura moins.

Il y a même aussi l'information qui donne un gain négatif, en inversant les degrés de croyances. Ainsi, soit le "message" suivant lu sur un grand journal (Le Soir, 29 janvier 1971): «Un journaliste dément que d'anciens légionnaires entraînent de jeunes fascistes italiens dans un camp en Corse». Le mot "dément" est souligné ici pour avancer l'argument suivant: combien de Lecteurs, qui auraient associé une probabilité a priori très faible à cette situation, augmenteraient leur degré de croyance a posteriori après avoir lu ce message nul, mais qui leur inspire un: "Tiens, ils font çà?"

Comme quoi, à la suite de Henri POINCARÉ qui a dit que «La pensée ne doit jamais se soumettre», on accompagnera Jean Français (compositeur, au 20e siècle):

Les autoroutes de la pensée m'intéressent moins que leurs (sic) sentiers

7 Le baiser chinois

7.1 Les fictions entropiques

Comme dans les halètements grandioses de la Symphonie Fantastique de BERLIOZ, on a d'abord battu la mesure. Celle-ci s'adresse au nombre de bits d'information que l'on peut transmettre : c'est l'aspect relevant de la théorie de l'information, apanage des "systèmes" techniques-symboliques qui ne font qu'assurer la logistique des processus impliquant des événements et leurs aléas. Peut-être un apport des mesures citées est-il de nous aider à appréhender le degré d'ordre dans nos idées, mais attention: des fois, on échange ses idées avec quelqu'un, et on en revient tout bête.

La correspondance entre la thermodynamique et l'information de gestion, quant à elle, court le danger de la "science-fiction". Les mots et les concepts y sont attirants, d'où la proposition de modèle, puis de théorie, ce qui est précisément le chemin que l'on prend lorsqu'on se laisse guider par l'analogie, comme il est montré dans l'exposé sur «La Systémographie».

Ainsi, de grands précurseurs ont "imaginé" des versions "scientifiques" de leurs idées:

- Leonardo DA VINCI a "imaginé" un hélicoptère et un sous-marin, en se disant qu'en produisant de l'énergie de façon concentrée – on verra bien un jour si cela vient – cela devrait fonctionner. Sa logique d'ingénierie lui a donné raison;
- Jules VERNE, dans La chasse au météore (Hachette, 1974, p. 108-110) présente en 1908 une prodigieuse anticipation de la relation entre la masse et une énergie concentrée (formulée ensuite selon "$E=mc^2$" par A. EINSTEIN) avec des idées sur son utilisation pour capter un météore. On trouve aussi, dans ces mêmes pages, une version de l'expansion de l'énergie et sa dégradation par l'entropie (déjà exposés à l'époque, mais à qui ?), ainsi que le principe d'une pile atomique qui n'était pas loin de se réaliser:

  > «Chacun de ses changements d'états [de la substance] s'accompagne d'un rayonnement d'énergie et d'une destruction de substance correspondante. Si cette destruction ne peut être constatée par nos instruments, c'est qu'ils sont trop imparfaits, une énorme quantité d'énergie étant enclose dans une parcelle impondérable de matière [...]. Cette destruction non constatée n'en existe pas moins. Son, chaleur, électricité, lumière en sont la preuve indirecte. Ces phénomènes sont de la matière rayonnée, et par eux se manifeste l'énergie libérée, quoique sous une forme grossière et semi-matérielle.»

- Cyrano DE BERGERAC, dans la pièce d'Edmond ROSTAND, donne quant à lui un certain nombre de moyens pour aller sur la lune. Par exemple, se coucher sur un pré et monter dans les airs avec la rosée. C'est de la science-poésie? Où en est la frontière ?

Ce sont effectivement différents cas de "science-fiction", car ils sont fondés sur ce qu'un auteur croit que peut faire la science. Ici, on prend de l'"informol" : la section 6 "exprime" des hypothèses sur des relations information-acteur en se servant d'expressions formulées dans le cadre scientifique de la thermodynamique – mais à qui la faute, sinon à ces damnés "entropielogistes"?

Dans le Tome Sud, heureusement, on se promène sur les grands boulevards des systèmes sous les platanes, entre les taches de soleil, en surfant sur les vagues de filles de Barcelona descendant la Rambla de Cataluña en se donnant le bras. Elles sont sérieuses quand elles se retournent pour voir qui les suit, puis se marrent entre elles en se gaussant des bedaines touristiques qui les "enthalpisent" – elles ne voient d’ailleurs pas la leur, de bedaine, puisqu’elles la portent sous le dos...

C’est là qu’on va se payer quelques cornets de néguentropie bien fraîche, en regardant les peintres des avenues ombragées illustrer, par la niaiserie de leurs modèles, les réponses aux enquêtes d’opinions.

7.2 Bref résumé de la synthèse

La meilleure synthèse de l’"Information" est de VOLTAIRE. Celui-ci échangeait une correspondance avec D’ALEMBERT, et cela les conduisit à rechercher entre eux le record de brièveté. Aussi, lorsque D’ALEMBERT lui écrivit «Eo rus» ("Je vais à la campagne", en latin), VOLTAIRE lui répondit par la missive suivante, signifiant en latin "va":

I

8 Bibliographie

BORLET, R., Éd. [1996]
Thermodynamique et cinétique chimique, Dunod, Paris.

BRILLOUIN, L. [1956]
Science and Information Theory, Academic Press, New York.

CHURCHMAN, W. [1961]
PredictionandOptimalDecision:PhilosophicalIssuesofaScienceofValues.PrenticeHall.

COLSON, G.[1973]
«Que peut apporter l'entropie à la Science de Gestion?»
Revue Belge des Sciences Commerciales, 1er trim.

COLSON, G., & BRACHWITZ, R. (avec DE BRUYN, CHR.) [1973]
«La méthode 'Two Stages Information Forecasts" et ses extensions»
Revue belge de Statistique, d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, 2.

DE BRUYN, CHR. & COLSON, G. [1973]
«Essai de schématisation d'une démarche informationnelle de gestion»,
Revue belge des Sciences Commerciales, 5.

DE BRUYN, CHR.. & COLSON, G. [1989]
«An integrated Multiobjective portfolio Management System»,
Mathematical and Computer Modelling. Pergamon Press, 12.

DE BRUYN, CHR. [1970]
«Peut-on "se" connaître vis-à-vis d'un marché spéculatif?»
Revue Belge des Sciences Commerciales, 3.

DE RYCKER, H. [1981]
«Une Approche didactique de la thermodynamique».
Conférence donnée à l'Association des Ingénieurs de l'Ecole de Liège le 5 mai.

LEV, B. [1969]
"Testing a prediction method for multivariate budgets", Empirical Research in Accounting : selected Studies, University of Chicago, 182-197.

LEV, B. [1970]
The informational Approach to Aggregation in financial Statements : Extensions"
Journal of Accounting Research, 8, 78_94.

PÉREZ, J.-P. [1977]
Thermodynamique, Masson, Paris.

SHANNON, C.E. & WEAVER, W. [1949]
The Mathematical Theory of Communication, University of Illinois Press, Urbana, USA.

STEPHAN, F. [1942]
«An iterative method for adjusting sample frequency tables when expected marginal totals are known»
The Annals of Mathematical Statistics, 2.

THEIL, H. [1969]
«On the use of information theory concepts in the analysis of financial statements",
Management Science, Vol. 15, 9.

YAGLOM ET YAGLOM, [1971]
Probabilité et information, I.M. 17, SIGMA, Dunod.

JANCOVICI, B. [1996]
Thermodynamique et physique statistique, Nathan, "Sciences 128".

SZILARD, L. [1929]
Zeitung Physik, 53, 840.